

## Exercices d'applications et de réflexions : DENOMBREMENT

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre (2BAC PC et SVT)

### TD : DENOMBREMENT

**Exercice1** : Soient A et B et C trois ensembles finis.

1) Calculer  $\text{card}(A-B)$  et  $\text{card}(A \Delta B)$  en fonction de  $\text{card}(A)$  et  $\text{card}(B)$  et  $\text{card}(A \cap B)$

2) Montrer que

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$$

(Formule de Poincaré (cas particuliers) :  $n=3$ )

**Exercice2** : Dans un lycée de 100 élèves, 53 pratiquent le football et 15 le football et basket-ball et 20 pratiquent seulement basket-ball sans football

1) Quelle est Le nombre d'élèves qui pratiquent le basket-ball ?

2) Quelle est Le nombre d'élèves qui pratiquent au moins un sport ?

3) Quelle est Le nombre d'élèves qui ne pratiquent pas Les deux sports ?

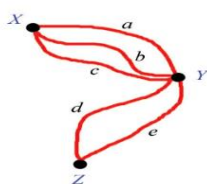
**Exercice3** : Dans une promotion de 36 étudiants, 22 maîtrisent le C++, 22 le C# et 18 le Java.

De plus, 10 étudiants maîtrisent à la fois le C++ et le C#, 9 maîtrisent à la fois le C# et le Java, et 11 à la fois le C++ et le Java.

Combien d'étudiants maîtrisent les trois langages de programmation ?

**Exercice4** : Les localités X et Y sont reliées par trois routes (a, b et c) et les localités Y et Z par deux routes (d et e).

Combien y a-t-il de trajets de X à Z en passant par Y ?



**Exercice5** : Combien de nombres de trois chiffres qu'on peut former avec les chiffres suivants : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ... ; 9 ?

**Exercice6** : On lance une pièce de monnaie 2 fois de suite. Quelle est le nombre de possibilités ?

**Exercice7** : On lance une pièce de monnaie trois fois de suite. Quelle est le nombre de possibilités ?

**Exercice8** : Une classe de 15 garçons et 12 filles. Il faut un garçon et une fille pour représenter la classe.

Combien de possibilités de choix ?

**Exercice9** : L'association de 20 membres souhaite élire :

- Le président,
- Le secrétaire, et
- Le trésorier.

Combien Ya-t-il de possibilités d'avoir ces trois responsables. Pas de cumul de fonction.

**Exercice10** : Combien de nombres de deux chiffres tels que : Le chiffre des unités est 0 ou 1 ou 2 et le Le chiffre des dizaines est 5 ou 6 ou 7 ou 8 ?

**Exercice11** : si On lance un dé deux fois de suite. Quelle est le nombre de possibilités ?

**Exercice12** : Combien de menus peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 5 plats et 4 desserts ?

**Exercice13** : Soit l'ensemble  $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

1) Combien de nombres de 3 chiffres on peut former avec les éléments de E ?

2) Combien de nombres de 3 chiffres différents deux à deux on peut former avec les éléments de E ?



**Exercice14 :** 1) de Combien de façons différentes peut - on ranger 5 boules de couleurs différentes dans 4 cases sachant que chaque case peut contenir tous les boules

**Exercice15 :** Combien de numéros de téléphone à 8 chiffres peut-on former ?

**Exercice16 :** Arrangements sans répétitions

Quel est le nombre de mots comportant 5 lettres distinctes ? (Sans se préoccuper du sens des mots)

**Exercice17 :** dans un tournoi il Ya 10 participants Déterminer le nombre de classements des 3 premiers places (on suppose que 2 coureurs ne peuvent pas prendre le même classement

**Exercice18 :** Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9.

1)On tire 3 boules de l'urne Successivement avec remise

Et on construit un nombre de trois chiffres

Quel est le nombre de nombres possibles ?

2)On tire 3 boules de l'urne Successivement sans remise

Quel est le nombre de nombres possibles ?

**Exercice18' :** Quelle est le nombre de mots de 4 lettres (avec un sens ou non) du mot « AID » qu'on peut former ?

**Exercice19 :** De combien de façons pouvez-vous ranger 10 livres sur une étagère ?

**Exercice20 :** De combien de façons peut-on mélanger un jeu de 36 cartes ?

**Exercice21 :** Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot : « excellence » ?

**Exercice22 :** soit  $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$  un ensemble. Quelle est le nombre de sous-ensembles à 2 éléments ?

**Exercice23 :** Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7.

On tire 2 boules de l'urne simultanément

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair ?

3. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair ?

**Exercice24 :** UN tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois

Combien doit-on organiser de matchs ?

**Exercice25 :** Le bureau d'une association contient 4 hommes et 5 femmes et on souhaite élire un comité de 2 hommes et 3 femmes

1) Combien de comités peut-on élire ?

2) on suppose que le président H1 et Madame la secrétaire F1 doivent être présent

Combien de comités peut-on élire ?

**Exercice26 :** À la fin de l'année scolaire, tous les élèves se serre la main. S'il y a 30 élèves, combien de poignées de mains sont échangées ?

**Exercice27:** Dans une classe de 20 élèves, on compte 12 garçons et 8 filles.

On doit élire 5 délégués

1)Quel est le nombre de choix possibles ?

2)Quel est le nombre de choix de délégués de même sexe ?

3)Quel est le nombre de choix de délégués de sexe différents ?

4)Quel est le nombre de choix de délégués qui contient 3 garçons et 2 filles ?

5)Quel est le nombre de choix qui contient au plus une fille ?

6)On suppose que dans cette classe il existe un élève x et sa sœur y

a) Quel est le nombre de choix de délégués de 5 élèves qui ne contiennent ni x ni y

b) Quel est le nombre de choix de délégués de 5 élèves qui contiennent x mais pas y

**Exercice28:** Combien de diagonales contient un polygone convexe à  $n$  côtés (une diagonale relie Deux sommets non adjacents) ?

**Exercice29 :** Développer  $(1 + x)^5$  et  $(1 - x)^5$  à l'aide de la formule du binôme.

**Exercice30 :** Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués.



Combien Ya-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

**Exercice31.** Une femme a dans sa garde-robe : 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

**Exercice32 :** A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr...) ?

**Exercice33 :** Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

**Exercice34 :** Six personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.

- 1) Combien de résultats peut-on obtenir ?
- 2) Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

**Exercice35:** Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

- 1) Calculer le nombre d'éléments de A.
- 2) Dénombrer les éléments de A :
  - a) composés de quatre chiffres distincts
  - b) composés d'au moins deux chiffres identiques
  - c) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7

**Exercice36:** Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc.

- 1) Quel est le nombre de dispositions possibles ?
- 2) Même question si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre.
- 3) Même question si chaque fille est intercalée entre deux garçons.
- 4) Même question si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre

**Exercice37 :** On trace dans un plan  $n \geq 3$  droites en position générale (c'est-à-dire que deux droites ne sont jamais parallèles, et 3 droites ne sont jamais concourantes). Combien de triangles a-t-on ainsi tracé ?

**Exercice38 :** Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués 1) Quel est le nombre de choix possibles ? 2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et fille 3) Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons

**Exercice39 :** Au service du personnel, on compte 12 célibataires parmi les 30 employés. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.

- 1) Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?
- 2) Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire ?
- 3) Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire ?

**Exercice40 :** Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

- 1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les possibilités :
  - a) De ne tirer que 3 jetons verts ;
  - b) De ne tirer aucun jeton vert
  - c) De tirer au plus 2 jetons verts ;
  - d) De tirer exactement 1 jeton vert.
- 2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac.

Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

**Exercice41 :** Najlaa et Amina font partie d'un club de 18 personnes. On doit former un groupe constitué de cinq d'entre elles pour représenter le club à un spectacle.

- 1) Combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer ?
- 2) Dans combien de ces groupes peut figurer Najlaa ?
- 3) Najlaa et Amina ne pouvant se supporter, combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer de telle façon que Najlaa et Amina ne se retrouvent pas ensemble ?

**Exercice42 :** Une course oppose 20 concurrents, dont Ahmed.

1. Combien Ya-t-il de podiums possibles ?



2. Combien Ya-t-il de podiums possibles où Ahmed est premier ?
3. Combien Ya-t-il de podiums possibles dont Ahmed fait partie ?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien Ya-t-il de distributions de récompenses possibles ?

**Exercice43** : Dans une pièce, il y a deux tables. La première dispose de 3 chaises, numérotées de 1 à 3, la seconde dispose de 4 chaises, numérotées de 1 à 4. Sept personnes entrent. Combien Ya-t-il de possibilités de les distribuer autour de ces deux tables ?

**Exercice45** : Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

- 1)1-1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
- 1-2) Combien Ya-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
- 1-3) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?
- 1-4) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?
- 2) Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
  - 2-1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
  - 2-2) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
  - 2-3) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

**Exercice46** : Ali et Fatima font partie d'une équipe de 8 joueurs (6 garçons et 2 filles). On décide de fabriquer un comité de 3 joueurs.

- 1) Combien y-a-t-il de comités possibles ?
- 2) Combien y-a-t-il de comités contenant exactement 2 garçons et 1 fille ?
- 3) Combien y-a-t-il de comités contenant au moins deux garçons ?
- 4) On veut que Ali et Fatima soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?
- 5) On ne veut pas que Ali et Fatima soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?

**Exercice47** : On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

si les livres doivent être groupés par matières. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

**Solution** : Il y a  $3!$  façons de choisir l'ordre des matières. Une telle façon choisie, il y a  $4!$  façons de ranger les livres de mathématiques,  $6!$  façons de ranger les livres de physique, et  $3!$  façons de ranger les livres de chimie. Le nombre de rangements possible est donc :  $3!4!6!3!$  Il peut y avoir 0,1,...,9 livres placés avant les livres de mathématiques. Il y a donc 10 choix du nombre de livres placés avant le livre de mathématiques. Ce choix fait, il y a  $4!$  façons d'ordonner les livres de mathématiques, et  $9!$  façons d'ordonner les autres : il y a donc en tout  $10 \times 4!9!$  rangements différents.

**Exercice48** : Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS.

**Exercice49** : Soit  $p$  points du plan distincts non aligner 3 par 3.

- 1) Combien de polygones à  $n \leq p$  côtés peut-on réaliser à partir de ces points ?
- 2) On fixe un tel polygone à  $n$  côtés. Combien de diagonales ce polygone comporte-t-il ?

**Exercice50** : Dans une urne se trouvent 9 boules : 4 rouges numérotées 0 ; 1 ; 1 ; 2 et 3 vertes numérotées 1 ; 2 ; 2 et deux noires numérotées : 1 ; 3 . On en tire 3 boules

Et on considère les événements suivants :

- A « obtenir trois boules de trois couleurs différentes. Deux à deux »  
 B « obtenir trois boules qui portent le même numéro »  
 C « la somme des numéros des boules tirées est égale à 4 »  
 D « obtenir au moins une boule rouge »

Trouver le nombre de possibilités des événements A ; B ; C ; D dans les cas suivants :

- 1) Tirage de 3 boules simultanément
- 2) Tirage de 3 boules Successivement Avec remise
- 3) Tirage de 3 boules Successivement sans remise

**Exercice 51**:  $k \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq k \leq n$

- 1) Montrer que :  $A_{n+1}^k = A_n^k + kA_n^{k-1}$



2)  $k \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq k \leq p \leq n$

Montrer que :  $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$  et déterminer la

valeur de la somme suivante :  $S = \sum_{k=0}^p C_n^k C_{n-k}^{p-k}$

3) Déterminer le nombre entier  $3 \leq n$  tel que :

$$C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 5n$$

4) Montrer que :  $2^n \geq 1+n$  et  $3^n \geq 1+2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

5) a) Montrer que :  $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

5) b) calculer :  $S_n = \sum_{k=0}^n k C_n^k$  en fonction de n

6) quelle est le coefficient de  $x^7 y^3 z^2$  dans

l'identité remarquable  $(x+2y+3z)^{12}$

**Exercice 52** : Soit E l'ensemble à 12 éléments  $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l\}$ .

A) Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent

1) a et b 2) a mais pas b 3) b mais pas a 4) ni a ni b

B) En déduire la relation :  $C_{12}^5 = C_{10}^3 + 2C_{10}^4 + C_{10}^5$

C) Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour  $2 \leq p \leq n$ , on a

$$C_n^p = C_{n-2}^{p-1} + 2C_{n-2}^{p-2} + C_{n-2}^p$$

D) Retrouver le résultat précédent en appliquant la formule du triangle de Pascal.

**Exercice 53** : Soit  $1 \leq p \leq n$ . On considère n boules et deux boîtes A et B. Un échantillon est constitué d'une boule dans la boîte A et de p-1 boules dans la boîte B. En dénombrant de deux façons différentes ces échantillons, établir la formule

$$nC_{n-1}^{p-1} = pC_n^p$$

Retrouver cette formule par le calcul.

**Exercice 54** : On a une grille de :  $7 \times 3 = 21$

(Voire le schéma)


1) On colore par le noir 4 carreaux de la grille

a. Quel est le nombre de cas possibles ?

b. Quel est le nombre de cas possibles tel que tous les carreaux noirs soient sur la même horizontal ?

c. Quel est le nombre de cas possibles tel que 3 carreaux noirs soient sur la même vertical ?

2) maintenant on colore 4 carreaux de la grille par les couleurs : noire, rouge et vert et jaune

a. Quel est le nombre de façons possibles ?

b. Quel est le nombre de façons possibles pour que les carreaux colorés soient sur la même horizontal

**Exercice 55** :  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}$  tq  $0 \leq p \leq n$

1) Montrer que :  $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$x^2 - C_n^p x + C_{n-1}^{p-1} C_{n-1}^p = 0$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement

Aux calculs et exercices Que l'on devient Un mathématicien

