تذكير لعموميات حول المتتاليات العددية و المتتاليات الحسابية و الهندسية

i. متتالية مكبورة – مصغورة – محدودة : (تذكير)

01. تعريف :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية. M و m عددين من $\mathbb{R}$.

- $(u_n)_{n\geq n_0}$ مكبورة ب M يكافئ $\forall n\geq n_0 ; u_n \leq M$. (أو $\forall n\geq n_0 ; u_n < M$)
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ مصغورة ب m يكافئ $\forall n\geq n_0 ; m\leq u_n$. (أو $\forall n\geq n_0 ; m < u_n$)
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة يكافئ إن u_n مكبورة ومحدودة .

02. مثال : نعتبر المتتالية العددية : $(w_n = \frac{n+3}{n+4})_{n\in\mathbb{N}}$. بين أن: w_n مكبورة ثم مصغورة على $\mathbb{N}$.

ii. رتابة متتالية :

01. تعريف :

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية.

1) u_n متتالية تزايدية على I يكافئ $\forall n,m\in I ; n<m \Rightarrow u_n \leq u_m$.
2) u_n متتالية تزايدية على I يكافئ $\forall n,m\in I ; n<m \Rightarrow u_n \leq u_m$
3) u_n متتالية ثابتة على I يكافئ $\forall n,m\in I ; u_n = u_m$

02. خاصية :

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية.

- u_n متتالية تزايدية على I يكافئ: $\forall n\in I ; u_n \leq u_{n+1}$.
- u_n متتالية تناقصية قطعا على I يكافئ: $\forall n\in I ; u_n \geq u_{n+1}$
- u_n متتالية ثابتة على I يكافئ: $\forall n\in I ; u_{n+1} = u_n$

03. مثال :

نأخذ $w_1 = 1$ و $w_{n+1} = 1 + w_n$. أدرس رتابة w_n .

iii. المتتالية الحسابية :

01. تعريف :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية .

نقول إن u_n متتالية حسابية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم r وحدها الأول u_{n_0} يعني إن $\forall n\geq n_0 : u_{n+1} - u_n = r$.

02. مثال: نعتبر المتتالية العددية الآتية : $u_n = 2n+3 ; n\geq 0$. بين أن u_n متتالية حسابية وحدد عناصرها المميزة .

iv. صيغة الحد العام لمتتالية حسابية :

01. خاصية :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0}. لدينا : $\forall n\geq n_0 : u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r$.

02. خاصية :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية حسابية أساسها r إذا وفقط إذا كان $\forall n,p\geq n_0 \; : \; u_n = u_p + (n-p)r$. (مع n و p من $\mathbb{N}$)

03. أمثلة :

- مثال 1 : u_n متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها u_7. أحسب u_{2007}.
- مثال 2 : u_n متتالية حسابية أساسها r وحدها $u_0 = 5$. أحسب $u_{100} = -45$. حدد r و u_n بدلالة n .

v. المجموع لحدود متتابعة لمتتالية حسابية :

01. خاصية :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0} . $n_0 \leq p < n$. لدينا :

$$S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[\frac{u_n + u_p}{2}\right] \times (n-p+1)$$

أو أيضا : (عدد الحدود) × $S_n = \dfrac{(\text{ le premier terme }) + (\text{ le dernier terme })}{2}$

02. ملاحظة :

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ هناك $n+1$ من الحدود

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ هناك n من الحدود

$S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$ هناك $n-1$ من الحدود

vi. متتالية هندسية :

01. تعريف :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية .

نقول إن u_n متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم q و حدها الأول u_{n_0} يعني ان $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = q \times u_n$

vii. صيغة الحد العام لمتتالية هندسية :

01. خاصية :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية هندسية أساسها q وحدها الأول u_{n_0}. لدينا : $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$

02. خاصية :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية هندسية أساسها q إذا وفقط إذا كان $\forall n,p \geq n_0 : u_n = u_p \times q^{n-p}$. (مع n و p من $\mathbb{N}$)

03. تمرين :

viii. المجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية :

01. خاصية :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية هندسية أساسها q وحدها الأول u_{n_0} . $n_0 \leq p < n$.

1) لدينا : مع $q \neq 1$: $S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[\dfrac{q^{(n-p+1)} - 1}{q-1}\right] \times u_p$

2) لدينا : مع $q = 1$: $S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = u_p + u_p + u_p + \dots + u_p = u_p(n-p+1)$

ix. المعدل الحسابي – المعدل الهندسي : لثلاثة حدود متتابعة .

01. المعدل الحسابي.

$u_i = a$ و $u_{i+1} = b$ و $u_{i+2} = c$ حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها r .

لدينا : $u_i = u_{i+1} - r$ و $u_{i+2} = u_{i+1} + r$ ومنه : $2u_{i+1} = u_i + u_{i+2}$.

خلاصة : $a + b = 2c$ وهي تسمى المعدل الحسابي .

02. المعدل الهندسي : إذا كانت u_n هندسية بالنفس الطريقة نحصل على: $a \times c = b^2$ تسمى المعدل الهندسي.

نهاية متتالية

A. نهاية منتهية لمتتالية

01. نشاط:

لنعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $u_n = \frac{1}{n}; \geq 2$

على المستقيم العددي نأخذ المجال المفتوح $I_0 = \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ الذي مركزه 0 . وحدة القياس $2cm$.

أ – مثل المجال على المستقيم العددي.

ب – أحسب بعض الحدود و مثلها على المستقيم العددي.

ج – ماذا تلاحظ ؟

د – إذا كانت n تؤول إلى $+\infty$. ماذا يمكن أن نقول عن قيم u_n؟

02. مفردات و رموز :

- نقول إن نهاية المتتالية u_n هي 0 عندما تؤول n إلى $+\infty$
- نكتب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

03. تعريف:

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية.

نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هي العدد الحقيقي ℓ إذا كان كل مجال مفتوح مركزه ℓ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ابتداء من رتبة معينة.

نكتب : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

04. ملاحظة:

- إذا كان للمتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ نهاية فهذه النهاية وحيدة .
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^i} = 0 \; (i \in \mathbb{N}^*)$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - \ell) = 0$

05. مثال:

لنعتبر المتتالية $u_n = \frac{1}{n} + 3; n \geq 1$. نبين أن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$.

لدينا: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\lim_{n\to+\infty} (u_n - 3) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + 3 - 3 =$. ومنه : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

B. نهاية لا منتهية لمتتالية:

01. تعريف:

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية.

- نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ هي $+\infty$ إذا كان كل مجال على شكل $]A, +\infty[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ابتداء من رتبة معينة. نكتب : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ هي $-\infty$ إذا كان كل مجال على شكل $]-\infty, A[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ابتداء من رتبة معينة. نكتب : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

06. ملاحظة:

$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ و $(i \in \mathbb{N}^*); \lim_{n\to+\infty} n^i = +\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

تقارب متتالية عددية :

01. تعريف:

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية .

- إذا كانت نهاية المتتالية u_n منتهية نقول إن المتتالية متقاربة.
- إذا كانت نهاية المتتالية u_n غير منتهية أو u_n ليس لها نهاية نقول إن المتتالية u_n متباعدة.

02. مثال:

- $u_n = n^4$. لدينا : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ إذن u_n متباعدة. $u_n = (-1)^n$ ليس لها نهاية: u_n هي متباعدة.

العمليات على نهايات المتتاليات ـ المتتاليات والترتيب

01. العمليات:

ملاحظة: لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليتين عدديتين .

- العمليات على المتتاليات هي نفس العمليات على الدوال العددية.

  مثال: $(u_n)_{n\geq n_0} + (v_n)_{n\geq n_0} = (u_n + v_n)_{n\geq n_0}$
- الخاصيات العمليات على نهايات المتتاليات العددية هي نفس خاصيات النهايات على الدوال.

  مثال : أ- $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = \ell + \ell'$

  مثال : ب - $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$

02. الترتيب:

▪ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$. إذا كان $v_n \le u_n$ فإن $\ell' < \ell$ و إذ كان $u_n > 0$ فإن $\ell > 0$

03. تطبيق:

1) أحسب نهاية المتتالية التالية: $u_n = \frac{1}{n} + 3; n \ge 1$

لدينا : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} 3 = 3$ ومنه: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

2) أحسب نهاية المتتالية التالية: $v_n = \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n}; n \ge 1$.

لدينا: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right) = 3$ و $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. ومنه : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n} = +\infty$

-مصادق التقارب-

01. نشاط:

p عدد صحيح طبيعي معلوم لكل عدد صحيح طبيعي n حيث $n \ge p$ فهو يحقق العلاقة (1) .

نعبر عنه ب: ابتداء من الرتبة p لدينا العلاقة (1).

لتكن $(u_n)_{n\ge n_0}$ و $(v_n)_{n\ge n_0}$ و $(w_n)_{n\ge n_0}$ متتاليات عددية حيث ابتداء من الرتبة p (مع $p \ge n_0$)

ماذا يمكن أن نستنتج في كل حالة من الحالات التالية:

▪ إذا كان: $v_n \le u_n \le w_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$ ؟

▪ إذا كان: $v_n \ge \alpha.u_n$ (مع $\alpha > 0$) و $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ؟

▪ إذا كان: $v_n \le \alpha.u_n$ (مع $\alpha > 0$) و $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ؟

▪ إذا كان: $|v_n - \ell| \le \alpha.u_n$ (مع $\alpha > 0$) و $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ؟

02. مصاديق:

لتكن $(u_n)_{n\ge n_0}$ و $(v_n)_{n\ge n_0}$ و $(w_n)_{n\ge n_0}$ متتاليات عددية إذا كان ابتداء من الرتبة p ($\forall n \in \mathbb{N}; n \ge p$) يتحقق ما يلي:

1. إذا كان : $v_n \le u_n \le w_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
2. إذا كان : $v_n \ge \alpha.u_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
3. إذا كان : $v_n \le \alpha.u_n$ و $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.
4. إذا كان : $|v_n - \ell| \le \alpha.u_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

مع $\alpha > 0$ و p عدد صحيح طبيعي معلوم ($p \ge n_0$) و $\ell \in \mathbb{R}$.

03. أمثلة :

1. مثال للمصداق 1:

لنعتبر المتتالية العددية المعرفة ب: $v_n = \frac{(-1)^n}{n} - 5 \; ; n > 0$

نبين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -5$.

لدينا: $-1 \le (-1)^n \le 1$ إذن: $\frac{-1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}$

و منه: $\frac{-1}{n} - 5 \le \frac{(-1)^n}{n} - 5 \le \frac{1}{n} - 5$

و بالتالي : $\frac{-1}{n} - 5 \le v_n \le \frac{1}{n} - 5$

و لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} - 5 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 5 = -5$

ومنه: حسب أحد مصاديق التقارب نحصل: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -5$

خلاصة : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -5$

2. مثال للمصداق 2:

لنعتبر المتتالية العددية المعرفة ب: $u_n = 2n + \cos(n); n \ge 0$ أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا: $-1 \le \cos(n) \le 1 \Leftrightarrow 2n - 1 \le 2n + \cos(n) \le 2n + 1$

ومنه : $2n - 1 \le 2n + \cos(n)$ أي $2n - 1 \le u_n$

ونعلم بأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n - 1 = +\infty$ إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

خلاصة: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n + \cos(x) = +\infty$

3. مثال للمصداق 4:

نبين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. $v_n = \frac{\cos n}{n} \; ; n \ge 1$

لدينا : (لأن $|\cos n| \le 1$) $|v_n - 0| = \left|\frac{\cos n}{n}\right| = \frac{|\cos n|}{n} \le \frac{1}{n}$

ومنه: $|v_n - 0| \le \frac{1}{n}$ و بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

تمرين : أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n + 5}{n^3}$.

04. خاصية :

- كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متقاربة.
- كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متقاربة.

05. مثال :

لنعتبر المتتالية : $u_n = \frac{1}{n^3} + 7; n \ge 1$.

1) نبين أن: u_n مصغورة:

لدينا: $n \geq 1$ إذن $\frac{1}{n}$ موجب قطعا أي $u_n > 0$ ومنه $0 < u_n$ وبالتالي u_n مصغورة ب 0. خلاصة: u_n مصغورة ب 0

2) نبين أن: u_n تناقصية:

لكل $n \geq 1$ لدينا: $n+1 \geq n \Leftrightarrow (n+1)^3 \geq n^3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3} \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

ومنه : u_n تناقصية. خلاصة: حسب ما سبق u_n مصغورة ب 0 و تناقصية إذن هي متتالية متقاربة.

10. ملحوظة:

- كل متتالية تزايدية و سالبة (أي مكبورة ب 0) هي متقاربة.
- كل متتالية تناقصية و موجبة (أي مصغورة ب 0) هي متقاربة.

متتاليات خاصة:

A. متتالية على شكل: $u_n = a^n$ مع $a \in \mathbb{R}$.

01. خاصية:

- إذا كان $a > 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$.
- إذا كان $a = 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- إذا كان $-1 < a < 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
- إذا كان $a \leq -1$ فإن : a^n ليس لها نهاية.

02. أمثلة:

- $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = +\infty$ لأن $a = 3 > 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $-1 < a = \frac{1}{2} < 1$.
- $(-1)^n$ ليس لها نهاية.
- تمرين: أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n - 8^n}{7^n}$

B. متتالية على شكل: $u_n = n^r$ مع $r \in \mathbb{Q}^*$.

01. خاصية:

- إذا كان $r < 0$ فإن : $\lim\limits_{n\to\infty} n^r = 0$.
- إذا كان $r > 0$ فإن : $\lim\limits_{n\to\infty} n^r = +\infty$.

02. مثال

- لنعتبر المتتالية التالية: $u_n = \sqrt[7]{n^3};n \geq 1$ أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
- لنعتبر المتتالية التالية: $u_n = \sqrt[7]{n^{-3}};n \geq 1$ أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

C. متتالية $(v_n)_{n\geq n_0}$ على شكل: $v_n = f(u_n)$

01. نشاط :

نعتبر الدالة : $f(x) = \dfrac{2x-5}{7x+4}$ و المتتالية $\left(u_n = \dfrac{1}{n^3}\right)_{n\geq 1}$.

1) لنعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة ب: $v_n = f(u_n)$ أكتب v_n بدلالة n.

2) أ – أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. ب - أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

3) إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ استنتج علاقة بين $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و f و ℓ.

4) أعط الخاصية :

02. خاصية :

إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية و f دالة متصلة في ℓ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ $(\ell \in \mathbb{R})$ فإن المتتالية $(v_n)_{n\geq n_0}$ المعرفة ب $v_n = f(u_n)$ هي متقاربة و نهايتها تحقق ما يلي: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(\ell)$.

تمرين :نضع: $f(x) = \dfrac{5x-6}{x+3}$ و $u_n = \dfrac{\cos n}{n};n \geq 1$.

1) أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2) نعتبر $v_n = \dfrac{5\cos n - 6n}{\cos n + 3n};n \geq 1$. أكتب v_n بدلالة f و u_n.

3) حدد النهاية التالية $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

D. متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ على شكل: $u_{n+1} = f(u_n)$

01. خاصية:

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و $f(I) \subset I$ و $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية حيث: $u_{n+1} = f(u_n)$

- $u_{n_0} \in I$ (حدها الأول من I).
- u_n متتالية متقاربة و نهايتها ℓ .

فإن ℓ هو حل للمعادلة $f(x) = x$.(أي ℓ تحقق $\ell = f(\ell)$)

02. مثال :

لنعتبر المتتالية: $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n};n \geq 0$ و $u_0 = 2$. نعتبر أن u_n متقاربة (u_n تزايدية و مكبورة ب).

1) حدد مجموعة اتصال الدالة $f(x) = \sqrt{6+x}$.

2) أعط جدول تغيرات f على D_f.

3) لنعتبر المجال $I = [0,3]$ تحقق بأن $f(I) \subset I$ و $u_0 \in I$. حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.