

# Structures algébriques : groupes, anneaux et corps

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Groupes</b>	<b>2</b>
1.1	Lois de composition interne . . . . .	2
1.2	Groupes . . . . .	3
1.3	Sous-groupes . . . . .	3
1.4	Morphismes de groupes . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Anneaux</b>	<b>5</b>
2.1	Structure d'anneau . . . . .	5
2.2	Sous-anneaux . . . . .	6
2.3	Morphismes d'anneaux . . . . .	6
2.4	Divisibilité . . . . .	7
2.5	Calculs dans les anneaux . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Corps</b>	<b>8</b>
3.1	Structure de corps . . . . .	8
3.2	Exemples . . . . .	9
3.3	Pour la suite . . . . .	9

# 1 Groupes

## 1.1 Lois de composition interne

### DEFINITION 1

Soit  $E$  un ensemble. Une *loi de composition interne* (LCI) sur  $E$  est une application  $T$  de  $E \times E$  dans  $E$ , notée généralement de façon infixé : on écrit  $xTy$  plutôt que  $T(x, y)$ , lorsque  $(x, y) \in E \times E$ .

### EXEMPLES 1

- La somme sur  $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  (mais pas sur  $\mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ ).
- Le produit sur  $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \dots$
- La différence sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$  (mais pas sur  $\mathbb{N}$ ).
- La composition des applications sur  $F^F$  (applications de  $F$  dans  $F$ ).
- La loi  $\oplus$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ .
- La loi  $\otimes$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $(x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$  (vous la reconnaissez ?)
- Les lois  $\cup, \cap$  et  $\Delta$  (réunion, intersection et différence symétrique) définies sur  $\mathcal{P}(F)$ .

### DEFINITION 2

- Une LCI  $T$  sur  $E$  sera dite *associative* lorsque :

$$\forall x, y, z \in E^3, \quad (xTy)Tz = xT(yTz).$$

- Une LCI  $T$  sur  $E$  sera dite *commutative* lorsque :

$$\forall x, y \in E^2, \quad xTy = yTx.$$

- Si  $T$  est une LCI associative sur  $E$ ,  $e \in E$  est un *neutre* pour  $T$  lorsque :

$$\forall x \in E, \quad xTe = eTx = x.$$

**PROPOSITION 1** Si  $T$  est une LCI associative sur  $E$  qui admet un neutre, alors ce neutre est unique. On peut alors parler DU neutre de  $T$ .

**PREUVE :** On suppose  $e_1$  et  $e_2$  neutres pour  $T$ , et on considère  $e_1Te_2 \dots$  ■

### EXEMPLES 2

- La somme et le produit sur  $\mathbb{C}$  (**donc sur ses sous-ensembles**) est associative et commutative, et admettent pour neutres respectifs 0 et 1.
- La différence n'est ni associative ni commutative sur  $\mathbb{R}$ .
- La loi  $\circ$  (composition des fonctions de  $F$  dans  $F$ ) est associative, mais n'est pas commutative (sauf si  $F$  est un singleton, auquel cas...). Elle admet un neutre, qui est l'application  $\text{Id}_F$ .
- Les lois  $\cup, \cap$  et  $\Delta$  sur  $\mathcal{P}(F)$  sont associatives et commutatives. Elles admettent pour neutres respectifs  $\emptyset, F$ , et  $\emptyset$ .
- $\oplus$  et  $\otimes$  sont associatives et commutatives sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Vue comme LCI sur  $\mathbb{N}^*$ ,  $+$  n'admet pas d'élément neutre.

**EXERCICE 1** Montrer que les lois  $\oplus$  et  $\otimes$  sur  $\mathbb{R}^2$  (cf exemples 1) admettent chacune un neutre.

### DEFINITION 3

Si  $T$  est une LCI associative sur  $E$  qui admet un neutre  $e$  et  $x \in E$ , on dit que  $x$  admet un *symétrique* pour  $T$  s'il existe  $y \in E$  tel que  $xTy = yTx = e$ .

**PROPOSITION 2** Dans la définition précédente, si  $y$  existe, il est unique. On peut alors parler DU symétrique de  $x$  pour  $T$ . On le note généralement  $x^{-1}$ .

**PREUVE :** Partir de  $y_1T(xTy_2) = (y_1Tx)Ty_2 \dots$  ■

## REMARQUES 1

- On peut avoir  $xTy = e_G$  sans avoir  $yTx = e_G$ . On prendra par exemple  $E = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ,  $T$  la loi  $\circ$  de composition des fonctions,  $y : n \mapsto n + 1$  et  $x : n \mapsto \text{Max}(n - 1, 0)$ .
- Les lois notées  $.$  sont souvent “oubliées” dans l’écriture :  $x.y$  devient  $xy$ .
- Grâce à l’associativité, on s’autorise à noter  $xTyTz$  la valeur commune de  $(xTy)Tz$  et  $xT(yTz)$ .
- Lorsque la loi est additive  $+$ , le symétrique est noté  $-x$  et est appelé “opposé”. Lorsque la loi est multiplicative  $.$ , le symétrique est appelé “inverse”. On n’utilisera JAMAIS la notation  $\frac{1}{x}$  (sauf pour les complexes-réels-entiers), puisqu’alors la notation  $\frac{y}{x}$  serait ambiguë dans le cas d’une loi multiplicative non commutative (ce qui sera la règle en algèbre linéaire) : a priori,  $y \cdot \frac{1}{x}$  et  $\frac{1}{x} \cdot y$  peuvent être distincts. . .

**EXERCICE 2** Si  $x$  et  $y$  admettent un symétrique pour une loi  $*$ , montrer que  $x * y$  admet également un symétrique.

## 1.2 Groupes

### DEFINITION 4

Un *groupe* est un ensemble non vide muni d’une loi de composition interne  $(G, *)$  tels que :

- $*$  est associative ;
- $*$  admet un neutre  $e_G$  ;
- tout élément de  $G$  est symétrisable (admet un symétrique) pour  $*$ .

Si  $*$  est commutative, on dit que  $(G, *)$  est commutatif, ou encore *abélien*.

### EXEMPLES 3

On fournit d’abord des exemples de groupes : dans les deux premiers cas et le dernier, il s’agit de groupes abéliens. Les deux autres (comme la plupart des groupes fonctionnels) sont non commutatifs.

- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  munis de la somme.
- $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*, \mathbb{U}, \mathbb{U}_n$  munis du produit.
- L’ensemble des homothéties et translations du plan, muni de la loi  $\circ$ .
- L’ensemble des permutations (bijections) de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  muni de la loi  $\circ$ .
- L’ensemble  $\mathcal{P}(E)$  muni de la différence symétrique  $\Delta$ .

### EXEMPLES 4

Pour diverses raisons (à déterminer), les couples suivants ne sont pas des groupes :

- $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{R}, .)$ .
- $(\mathbb{U}, +)$ .
- $(E^E, \circ)$ .
- $(\mathcal{P}(E), \cup), (\mathcal{P}(E), \cap)$ .

**EXERCICE 3** Montrer que  $(\mathbb{R}^2, \oplus)$  et  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \otimes)$  sont des groupes commutatifs.

## 1.3 Sous-groupes

### DEFINITION 5

Un *sous-groupe* d’un groupe  $(G, *)$  est une partie *non vide*  $H$  de  $G$  telle que :

- $*$  induit sur  $H$  une loi de composition interne.
- Muni de cette loi,  $H$  est un groupe.

On note alors :  $H < G$ .

### REMARQUES 2

- *En pratique*, pour montrer qu’une partie non vide  $H$  de  $G$  en constitue un sous-groupe, il suffit de vérifier :
  - $e_G \in H$  ;

- $H$  est stable par  $*$  ;
- pour tout  $x \in H$ , le symétrique  $x$ , a priori dans  $G$ , est en fait dans  $H$ .
- L'intérêt principal de la remarque précédente tient dans le fait que dans bien des cas, on peut montrer que  $(H, *)$  est un groupe en montrant grâce au critère précédent que c'est un *sous-groupe d'un groupe connu*. Il est alors inutile de montrer l'associativité, la commutativité et même l'existence d'un neutre : il n'y a que des VERIFICATIONS à faire.

#### EXEMPLES 5

- Pour la loi  $+$ , on a la "tour de groupe" (inclusions successives de sous-groupes/groupes) suivante :

$$\{0\} < 1515\mathbb{Z} < \mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R} < \mathbb{C}$$

- Pour la multiplication usuelle :

$$\{1\} < \mathbb{U}_n < \mathbb{U} < \mathbb{C}^*$$

mais aussi :

$$\{1\} < \{-1, 1\} < \mathbb{Q}^* < \mathbb{R}^* < \mathbb{C}^*$$

- Si  $G$  est un groupe,  $\{e_G\}$  et  $G$  en constituent des sous-groupes (dits triviaux)

**EXERCICE 4** Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux sous-groupes de  $(G, \cdot)$ . Montrer que  $H_1 \cap H_2$  est également un sous-groupe de  $G$ .

On verra en TD que ça se passe moins bien pour la *réunion* de deux sous-groupes.

**EXERCICE 5** On définit l'ensemble :

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{k + l\sqrt{2} \mid k, l \in \mathbb{Z}\}.$$

Montrer que  $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +)$  constitue un groupe ( $+$  est l'addition usuelle des réels).

## 1.4 Morphismes de groupes

### DEFINITION 6

- Soient  $(G, *)$  et  $(H, T)$  deux groupes. Une application de  $G$  dans  $H$  est un "morphisme de groupes" lorsque :

$$\forall x, y \in G, \quad f(x * y) = f(x) T f(y).$$

- Si  $G = H$  et  $* = T$ , on parle d'*endomorphisme*.
- Si  $f$  est bijective, on parle d'*isomorphisme*.
- Si  $f$  est un endomorphisme bijectif, on parle d'*automorphisme*.

### EXEMPLES 6

- $x \mapsto 2^x$  réalise un isomorphisme de  $(\mathbb{R}, +)$  sur  $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$  ;
- $x \mapsto 2x$  réalise un automorphisme de  $(\mathbb{R}, +)$  ;
- $x \mapsto 3 \ln x$  réalise un isomorphisme de  $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$  sur  $(\mathbb{R}, +)$  ;
- $z \mapsto |z|$  réalise un morphisme de  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  dans  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ .
- Si  $G$  est un groupe **abélien**,  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto x^{-1}$  réalisent des endomorphismes de  $G$ .
- $\theta \mapsto e^{i\theta}$  réalise un morphisme de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ , et même sur  $(\mathbb{U}, \cdot)$ .

**EXERCICE 6** Si  $f$  est un morphisme de  $(G, *)$  dans  $(H, \circ)$  et  $g$  un morphisme de  $(H, \circ)$  dans  $(K, T)$ , montrer que  $g \circ f$  réalise un morphisme de  $(G, *)$  dans  $(K, T)$ .

**EXERCICE 7** Montrer que si  $f$  est un isomorphisme de  $(G, *)$  sur  $(H, \circ)$ , alors son application réciproque  $f^{-1}$  réalise un isomorphisme de  $(H, \circ)$  sur  $(G, *)$ .

**PROPOSITION 3** Quelques propriétés élémentaires des morphismes de groupes :  $f$  est ici un morphisme de  $(G, *)$  dans  $(H, T)$ .

- $f(e_G) = e_H$ .
- Si  $f$  est un isomorphisme, alors son application réciproque réalise un isomorphisme de  $(H, T)$  sur  $(G, *)$ .
- Si  $G_1 < G$ , alors  $f(G_1) < H$ .
- Si  $H_1 < H$ , alors  $f^{-1}(H_1) < G$ .

PREUVE : Élémentaire, donc à savoir faire seul! ■

### DEFINITION 7

Soit  $f$  un morphisme de  $G$  dans  $H$ .

- Le noyau de  $f$ , noté  $\text{Ker } f$  est l'ensemble des antécédents par  $f$  de  $e_H$  :

$$\text{Ker } f = \{x \in G; f(x) = e_H\} = f^{-1}(e_H)$$

(attention,  $f$  n'est pas supposée bijective ; il n'est donc pas question de la bijection réciproque de  $f$ ).

- L'image de  $f$ , noté  $\text{Im } f$  est  $f(G)$  (ensemble des images par  $f$  des éléments de  $G$ ).

D'après les deux derniers points de la proposition 3, le noyau et l'image de  $f$  sont des sous-groupes respectifs de  $G$  et  $H$ .

**EXERCICE 8** Montrer que  $(\mathbb{U}, \cdot)$  est un groupe, en le voyant successivement comme image et noyau d'un morphisme de groupe.

Bien entendu, et c'est une triviale, un morphisme de  $G$  dans  $H$  est surjectif si et seulement si son image est égale à  $H$ . Ce résultat est d'ailleurs sans intérêt ... Le résultat suivant est bien plus intéressant, puisqu'il réduit énormément le travail, pour montrer qu'un morphisme est injectif.

**PROPOSITION 4** Soit  $f$  un morphisme de  $(G, *)$  dans  $(H, T)$ . Alors  $f$  est injectif si et seulement si son noyau est réduit à  $\{e_G\}$ .

PREUVE : Élémentaire, donc à savoir faire seul... ■

**EXERCICE 9** L'application  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x - y, 3x + 2y)$  est-elle injective ?

## 2 Anneaux

### 2.1 Structure d'anneau

#### DEFINITION 8

Un anneau est un ensemble muni de deux LCI  $(A, +, \cdot)$  tels que :

- $(A, +)$  est un groupe commutatif de neutre noté  $0_A$ .
- La loi  $\cdot$  est une LCI sur  $A$  associative et distributive à gauche et à droite par rapport à  $+$  :

$$\forall x, y, z \in A, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{et} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

- La loi  $\cdot$  admet un neutre différent de  $0_A$ , noté  $1_A$ .

Si la loi  $\cdot$  est commutative, l'anneau est dit commutatif ou abélien.

**EXERCICE 10** Si  $x \in A$ , montrer que  $0_A \cdot x = 0_A$  (considérer  $0_A \cdot x + 0_A \cdot x$ ).

#### EXEMPLES 7

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$  et  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  sont des anneaux bien connus.
- $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$  est un anneau plus anecdotique.
- $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$  est un anneau... connu sous une autre identité!

- L'ensemble des suites réelles, muni de l'addition et du produit des suites, est un anneau. Même chose pour l'ensemble des fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . On déterminera précisément les neutres de ces anneaux.

### REMARQUES 3

- Il est nécessaire d'imposer la distributivité à droite et à gauche. Par exemple,  $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \circ)$  n'est pas un anneau : on a bien  $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$  pour tout  $f, g, h$ , mais pas nécessairement  $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$ .
- Lorsqu'on travaille dans un anneau, de nombreux calculs se passent "comme dans  $\mathbb{R}$ ". Cela dit, il faut faire attention par exemple à ne pas diviser. Le meilleur moyen pour ne pas dire d'ânerie consiste en fait à "faire comme dans  $\mathbb{Z}$ ".

## 2.2 Sous-anneaux

### DEFINITION 9

Soit  $(A, +, \cdot)$  un anneau. Une partie non vide  $A_1$  de  $A$  est un *sous-anneau* de  $A$  lorsque :

- $\mathbf{1}_A \in A_1$  ;
- les lois  $+$  et  $\cdot$  induisent des LCI sur  $A_1$ , et, muni de ces lois,  $(A_1, +, \cdot)$  est un anneau.

**REMARQUE 4** Contrairement aux sous-groupes, on ne peut pas se passer de la condition  $\mathbf{1}_A \in A_1$ , qui ne découle pas des autres conditions<sup>1</sup>. On verra en exercice un contre-exemple.

Comme pour les sous-groupes, il est assez moyennement intéressant de montrer à nouveau les associativités et même la distributivité. Fort heureusement, on a le résultat (quasi-évident) suivant :

**PROPOSITION 5** Une partie  $A_1$  de  $A$  est un sous-anneau si et seulement si

- $(A_1, +)$  est un sous-groupe de  $(A, +)$  ;
- $\mathbf{1}_A \in A_1$  ;
- $\cdot$  induit une LCI sur  $A_1$ .

### EXEMPLES 8

- Bien entendu,  $\mathbb{Z}$  est un sous-anneau de  $\mathbb{Q}$  qui est un sous-anneau de  $\mathbb{R}$ .
- L'ensemble des fonctions dérivables sur  $I$  constitue un sous-anneau des fonctions continues sur  $I$ , qui constitue lui-même un sous-anneau de l'ensemble des fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .
- L'ensemble des suites réelles stationnaires est un sous-anneau de  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ , qui est un sous-anneau de  $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ .

**EXERCICE 11** Montrer que  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  est un sous-anneau de  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 12** Montrer que si  $A_1$  et  $A_2$  sont deux sous-anneaux d'un anneau  $A$ , alors  $A_1 \cap A_2$  est également un sous-anneau de  $A$ .

## 2.3 Morphismes d'anneaux

### DEFINITION 10

Soient  $(A, +, \cdot)$  et  $(B, +, \cdot)$  deux anneaux (on note de la même façon les lois de  $A$  et  $B$ ...). Un *morphisme d'anneaux* de  $A$  vers  $B$  est une application de  $A$  vers  $B$  telle que :

- $f(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_B$  ;
- pour tout  $x, y \in A$ ,  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  et  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ .

### EXEMPLES 9

- $z \mapsto \bar{z}$  réalise un automorphisme d'anneaux de  $\mathbb{C}$ .
- $f \mapsto f(\pi)$  réalise un morphisme d'anneaux de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  sur<sup>2</sup>  $\mathbb{R}$ .

<sup>1</sup>on se rappelle que dans le cas d'un sous-groupe  $H$  de  $G$ , la relation  $e_G \in H$  est une conséquence de la définition

<sup>2</sup>comme pour les fonctions, on dit "de  $E$  sur  $F$ " plutôt que "de  $E$  dans  $F$ ", lorsque le morphisme est surjectif

- $u \mapsto u_{1515}$  réalise un morphisme d'anneaux surjectif (pourquoi ?) de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  sur  $\mathbb{C}$ .

## REMARQUES 5

- La relation  $f(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_B$  ne découle pas des autres relations<sup>3</sup> ; on ne peut donc pas s'en passer dans la définition.
- A fortiori, un morphisme d'anneaux est un morphisme de groupe (pour la première loi). A ce titre, on peut parler de son image et de son noyau. Malheureusement, si l'image est un sous-anneau de l'anneau d'arrivée (le montrer), le noyau n'est pas nécessairement un sous-anneau de l'anneau de départ, ce qui limite l'intérêt des morphismes d'anneaux. Cependant, on garde l'équivalence entre l'injectivité de  $f$  et le fait que  $\text{Ker } f = \{0_A\}$ .

**EXERCICE 13** Montrer que la composée de deux morphismes d'anneaux est un morphisme d'anneaux.

**EXERCICE 14** Montrer que si  $f$  est un isomorphisme d'anneaux, alors son application réciproque également.

## 2.4 Divisibilité

### DEFINITION 11

Soit  $(A, +, \cdot)$  un anneau commutatif.

- On dit que  $x \in A$  est *inversible* s'il admet un symétrique pour la loi  $\cdot$ .
- On dit que  $a$  *divise*  $b$  s'il existe  $c \in A$  tel que  $b = ca$ . On note  $a|b$ .
- On dit que  $a$  est un *diviseur de 0* s'il existe  $b \neq 0$  tel que  $ab = 0$ .
- Un anneau est dit *intègre* s'il ne contient pas de diviseur de 0 autre que 0 lui-même.

Les faits suivants sont faciles à montrer :

**PROPOSITION 6** Dans un anneau commutatif  $(A, +, \cdot)$  :

- $0_A$  n'est jamais inversible.
- Si  $x$  est inversible, alors ce n'est pas un diviseur de 0.
- Si  $x_1, x_2, y \in A$  intègre, avec  $y \neq 0$  et  $x_1y = x_2y$ , alors  $x_1 = x_2$ . On dit qu'"on peut simplifier" (ce qui ne veut pas dire diviser) par  $y \neq 0$ .

### EXEMPLES 10

- $\mathbb{Z}$  est intègre, et ses éléments inversibles sont 1 et  $-1$ .
- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont des anneaux intègres dont tous les éléments non nuls sont inversibles.
- L'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  n'est pas intègre : toute application  $f$  qui s'annule est diviseur de 0 (le montrer). Les éléments inversibles sont les fonctions qui ne s'annulent pas.

**EXERCICE 15** Montrer que  $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  est un sous-anneau intègre de  $\mathbb{C}$ , dont les inversibles sont 1,  $i$ ,  $-1$  et  $-i$ .

## 2.5 Calculs dans les anneaux

- On rappelle la formule du *binôme de Newton*, qui s'étend de  $\mathbb{Z}$  aux anneaux commutatifs, mais aussi (et cela sert effectivement<sup>4</sup>) dans un anneau quelconque, avec deux éléments qui commutent :

**PROPOSITION 7** Soient  $a, b \in A$ , avec  $ab = ba$ , et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

**PREUVE** : Récurrence sur  $\mathbb{N}$  et formule du triangle de Pascal. ■

<sup>3</sup>contrairement aux morphismes de groupes, pour lesquels la relation  $\varphi(e_G) = e_H$  est une conséquence de la définition  
<sup>4</sup>en particulier dans les anneaux de matrices

- Si  $x, y \in A$  commutent et  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $x - y | x^n - y^n$ , et plus précisément :

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

**BIEN ENTENDU**, pour les deux derniers résultats, l'hypothèse essentielle  $xy = yx$  ne sera jamais oubliée...

- Cas particulier de ce qui précède : si  $1 - x$  est inversible (ce qui n'est pas EQUIVALENT à  $x \neq 1$ ), on peut calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$  grâce à la formule :

$$1 - x^n = (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

$1_A$  commute en effet avec tous les éléments de l'anneau.

- On verra en TD de Maple l'algorithme d'*exponentiation rapide*, qui permet de calculer  $a^n$  en  $O(\ln n)$  multiplications. L'idée apparaît dans l'exemple suivant :

$$a^{53} = a.(a^2)^{26} = a.(a^4)^{13} = a.a^4.(a^8)^6 = a.a^4.(a^{16})^3 = a.a^4.a^{16}.a^{32}.$$

Il suffit donc de calculer les  $a^{2^k}$ , et d'en tenir compte dans le résultat final lorsque la puissance en cours est impaire (si  $(a^4)^{13}$  apparaît en cours de calcul, alors  $a^4$  interviendra dans le résultat). Au vu de cet exemple, on peut formaliser l'algorithme d'exponentiation rapide de la façon suivante :

Fonction Expo\_rapide(x,n)

Debut

```

Res<-1; # Contiendra à la fin le résultat
Puis<-x; # Contiendra les puissances successives de x
N<-n; # Puissance à laquelle Puis doit encore être évalué
Tant_que N>0
  Si N est impair Alors Res<-Res*Puis Fsi;
  Puis<-Puis^2;
  N<-N/2 # en fait, le quotient dans la division euclidienne
Fin_Tant_que;
RETOURNER(Res)

```

Fin

Mise en oeuvre en TD Maple...où on verra une seconde version récursive plus rapide à écrire, mais qui semble un peu magique!

Pour prouver la validité de cet algorithme, on peut noter (là encore au vu de l'exemple) PUIS prouver que la quantité  $\text{Res} * \text{Puis}^N$  reste égale à  $x^n$  en cours d'exécution<sup>5</sup>. Quand on veut frimer, on parle d'*invariant de boucle*.

## 3 Corps

### 3.1 Structure de corps

DEFINITION 12

- Un *corps* est un anneau commutatif dans lequel tout élément non nul est inversible.
- Si  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  est un corps, un *sous-corps* de  $\mathbb{K}$  est un sous-anneau  $\mathbb{K}_1$  de  $\mathbb{K}$  tel que pour tout élément non nul  $x$  de  $\mathbb{K}_1$ , on a  $x^{-1} \in \mathbb{K}_1$ ;  $(\mathbb{K}_1, +, \cdot)$  est alors un corps.

<sup>5</sup>au début et à la fin de chaque tour de boucle

**REMARQUE 6** Si on enlève l'hypothèse de commutativité, on obtient ce que les anglo-saxons appellent “*division ring*”, traduit piteusement par “*anneau à division*”. En taupe, dans les temps anciens, le terme de *corps* désignait d'ailleurs ces anneaux à divisions.

En anglais, les corps se nomment “*fields*”. Pourquoi ? mystère...

### 3.2 Exemples

- $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont des corps, mais pas  $\mathbb{Z}$  (2 n'est pas inversible).
- On verra plus tard le *corps des fractions rationnelles* (quotients de polynômes).
- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  et  $\mathbb{Q}[i]$  sont des sous-corps respectifs de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ .
- Si on reprend les lois  $\oplus$  et  $\otimes$  des exemples 1,  $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$  est un corps... qui ressemble fortement à  $\mathbb{C}$ .

### 3.3 Pour la suite

Il n'existe en Spé (hors MP/MP\*) que 2, 5 corps :  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , et (accessoirement...)  $\mathbb{Q}$ .

Bien entendu, si on passe l'X (et si on n'a pas trop de chance...), il ne faudra rien ignorer des corps finis  $\mathbb{F}_q$ , mais c'est une autre histoire !