

Exercices

TD : Structures algébriques (partie 2)

Groupe anneau corps

Exercice 1: on pose $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall (x; y) \in I^2$

On muni I de la loi de composition définie par :

$$x * y = \arctan(-1 + \tan x + \tan y)$$

Montrer que $(I; *)$ est un groupe commutatif

Exercice 2: on muni \mathbb{R}^2 d'une loi de composition interne T défini par :

$$(x; y) T (x'; y') = (x + x'; ye^{x'} + y'e^{-x})$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall (x'; y') \in \mathbb{R}^2$$

Montrer que $(\mathbb{R}^2; T)$ groupe non commutative

Exercice 3: soit $(G; \cdot)$ un groupe noté

multiplicativement et tel que : $(a; b) \in G^2$

$$(ab)^2 = a^2 b^2 \text{ Montrer que ce groupe est}$$

commutatif

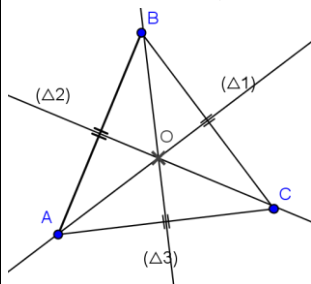
Exercice 4: (étude d'un groupe fini)

Montrer que $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; +)$ et $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} - \{\bar{0}\}; \times)$ sont

deux groupes commutatifs

Exercice 5: (étude d'un groupe fini)

(ABC) un triangle équilatéral



(Δ_1) la médiatrice du segment $[BC]$

(Δ_2) la médiatrice du segment $[AB]$

(Δ_3) la médiatrice du segment $[AC]$

Soit ζ l'ensemble des transformations

suivantes : $\zeta = \{r_1; r_2; r_3; s_1; s_2; s_3\}$

r_1 la rotation de centre O et d'angle 0 : $r_1(O; 0)$

r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$: $r_2\left(O; \frac{2\pi}{3}\right)$

r_3 la rotation de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$: $r_3\left(O; \frac{4\pi}{3}\right)$

s_1 la symétrie axial d'axe: (Δ_1)

s_2 la symétrie axial d'axe : (Δ_2)

s_3 la symétrie axial d'axe : (Δ_3)

Montrer que : $(\zeta; \circ)$ est un groupe

Exercice 6: soit $(G; \cdot)$ un groupe noté

multiplicativement et e l'élément neutre de G

1) Montrer que si: $\forall (a; b) \in G^2 : (a.b)^2 = a^2 . b^2$

alors le groupe G est commutatif

2) Montrer que si: $\forall x \in G : x^2 = e$ alors le

groupe G est commutatif

Exercice 7: (on considère l'ensemble des

$$\text{matrices suivante : } E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que E n'est pas un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}); +)$

Exercice 8: soit I l'ensemble des nombres entiers relatifs pairs

montrer que $(I; +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}; +)$

Exercice 9: montrer que : $H = \{3^m 7^n / m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}\}$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*; \times)$

Exercice 10: $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

Montrer que $(U; \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*; \times)$

Exercice 11: on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} \ln a & 0 \\ 0 & \ln a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}^{**} \right\}$$

Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}); +)$

Exercice 12 : soit $(G; \cdot)$ un groupe noté

multiplicativement et soit $a \in G$

On pose : $C_a = \{x \in G / ax = xa\}$

(centralisateur de a)

Et : $Z(G) = \{x \in G / \forall y \in G : xy = yx\}$ (centre de G)

Montrer que C_a et $Z(G)$ sont des sous-groupes

de : $(G; \cdot)$

Exercice 13 : On munit \mathbb{R} de la loi de composition interne définie par :

$$x * y = x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}; \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

1) soit l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par : } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; +)$ vers $(\mathbb{R}; *)$

2) En déduire la structure de $(\mathbb{R}; *)$

Exercice 14 : on considère l'ensemble suivant :

$$E = \{a + b\sqrt{3} / (a; b) \in \mathbb{Q}^2\}$$

1) Montrer que $(E; +)$ est un groupe commutatif

2) Montrer que E est une partie stable de $(\mathbb{Q}; \times)$

3) Montrer que $(E; +; \times)$ est un anneau commutatif unitaire

Exercice 15: Soit $(A; +; \times)$ un anneau.

Tel que : $x^2 = x \quad \forall x \in A$ ($(A; +; \times)$ s'appelle anneau De Boole)

1) calculer $(x+x)^2$

2) en déduire que : $x+x=0_A$ (0_A est l'élément neutre de $(A; +)$)

3) soient : $x \in A$ et $y \in A$

a) calculer $(x+y)^2$ en fonction de x et y

b) en déduire que $(A; +; \times)$ est commutatif

c) en déduire : $xy(x+y)$

4) on suppose que : $x \neq 0_A$ et $y \neq 0_A$ et $y \neq x$

a) montrer que : a) $x+y \neq 0_A$ b) $x+y \neq y$

5) déterminer le tableau de la somme pour les éléments : $0_A ; x ; y ; x+y$

Exercice 16: soit $(K, +, \times)$ un corps finit :

$$K = \{0; e; x_1; x_2; \dots; x_m\}; m \in \mathbb{N}^*$$

Avec : 0 (resp. e) l'élément neutre pour $+$ (resp. \times).

- 1) montrer que : $-e$ et e sont les seuls éléments de K qui sont égaux à leurs symétriques pour la loi \times
- 2) montrer que le produit de tous les éléments de K est égal à $-e$

3) on considère le corps $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +; \times)$ avec n

premier montrer que : $\overline{(n-1)!} + 1 \equiv 0 [n]$

Exercice 17: on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Montrer que $(E; +)$ est un groupe commutatif

2) Montrer que E est une partie stable de

$$(M_2(\mathbb{R}); \times)$$

3) soit f l'application qui associe à chaque

matrice $M_{(a,b)}$ de $E - \{0_2\}$ le nombre complexe :

$$a + ib\sqrt{2} \text{ de } \mathbb{C}^*$$

a) Montrer que f est un morphisme bijectif de

$$(E - \{0_2\}, \times) \text{ dans } (\mathbb{C}^*; \times)$$

b) en déduire la structure de $(E - \{0_2\}, \times)$

4) Montrer que $(E; +; \times)$ est un corps

Exercice 18: Soit $(K; +; \times)$ un corps.

On note : 0_K l'élément neutre de $(K; +)$ et 1_K

l'élément neutre de $(K; \times)$ et on suppose qu'il

existe un homomorphisme f bijectif de $(K; +)$

$$\text{vers } (K - \{0_K\}; \times)$$

1) on suppose que $1_K + 1_K = 0_K$

montrer que : $f(K) = \{1_K\}$

2) on suppose que : $1_K + 1_K \neq 0_K$ et on pose :

$$\alpha = f^{-1}(1_K) \text{ et } \beta = f^{-1}(-1_K)$$

a) montrer que : $\alpha + \alpha = \beta + \beta$

b) en déduire que $\alpha = \beta$

3) en déduire qu'il n'existe pas

d'homomorphisme f bijectif de $(K; +)$ vers

$$(K - \{0_K\}; \times)$$

Exercice 19 :

1) On munit de la loi de composition interne

$$\text{définie par : } x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1); \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est élément neutre.

2) On munit \mathbb{R}^{**} de la loi de $*$ composition interne

$$\text{définie par : } x * y = \sqrt[3]{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Montrer que $*$ est commutative, associative, et que 0 est élément neutre. Montrer que aucun élément de \mathbb{R} n'a de symétrique pour $*$

3) On munit \mathbb{R} de la loi de composition interne $*$

$$\text{définie par : } x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Montrer que l'application : $x \rightarrow x^3$ est un

isomorphisme de $(\mathbb{R}; *)$ vers $(\mathbb{R}; +)$ En déduire que

$(\mathbb{R}; *)$ est un groupe commutatif

Exercice 20: on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$G = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / a^2 + b^2 = 1 \text{ et } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Montrer que : $G \neq \emptyset$

$$2) \text{ Montrer que : } G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

3) Montrer que G est une partie stable de

$$(M_2(\mathbb{R}); \times)$$

4) est ce que G est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); +)$?

5) on pose : $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

calculer $M^n(\theta) \forall n \in \mathbb{N}^*$

ou : $M^n(\theta) = \underbrace{M(\theta) \times M(\theta) \times \dots \times M(\theta)}_{n \text{ fois}}$

6) soit f l'application de \mathbb{R} dans G tel que :

$$f(\theta) = M(\theta)$$

a) Montrer que f est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R}; +)$ dans $(G; \times)$

b) en déduire la structure de $(G; \times)$

7) soit l'ensemble : $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

a) Montrer que : $U = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$

b) Montrer que $(U; \times)$ est un groupe commutatif

Exercice 21: Soit $(A; +; \times)$ un anneau.

Et 1_A est l'élément neutre de $(A; \times)$

soient : $a \in A$ et $b \in A$ tels que :

a) $ab + ba = 1_A$

b) $a^2b + ba^2 = a$

1) montrer que : $a^2b = ba^2$

2) montrer que : $aba + aba = a$

3) en déduire que : $ab = ba$

Exercice 22: Soit $(K; +; \times)$ un corps.

On note : 1_K l'élément neutre de $(K; \times)$

Soient x et y deux éléments de $K - \{0_K\}$

Qui vérifient les conditions suivantes :

a) $x + y = 1_K$ b) $x^{-1} + y^{-1} = 1_K$

avec : x^{-1} le symétrique de x pour la loi \times

1) montrer que : $xy = yx = -1_K$

2) montrer que : $x^4 + y^4 = 7 \cdot 1_K$

Avec : $7 \cdot 1_K = \underbrace{1_K + 1_K + \dots + 1_K}_{7 \text{ fois}}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

