

Exercices AVEC SOLUTIONS

Structures algébriques(partie1)

Exercice1 : montrer on utilisant les tableaux de l'addition et de la multiplication dans

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$ que l'addition et la multiplication sont des loïs de compositions internes

Solution :

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Tableau de : $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; +)$

×	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Tableau de : $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; \times)$

on utilisant les tableaux de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on remarque bien que ce sont des loïs de compositions internes

Exercice2 : on définit sur l'ensemble $]-1;1[$ la

relation T tel que : $xTy = \frac{x+y}{1+xy}; \forall (x,y) \in]-1;1[$

Monter que T est une loi de composition interne

Dans $]-1;1[$

Solution : soit $x \in]-1;1[$ et $y \in]-1;1[$

Montrons que : $xTy = \frac{x+y}{1+xy} \in]-1;1[$?

Calculons : $1 - \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2$

$$1 - \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 = \frac{(1+xy)^2 - (x+y)^2}{(1+xy)^2} = \frac{x^2y^2 + 2xy + 1 - x^2 - y^2 - 2xy}{(1+xy)^2}$$

$$1 - \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 = \frac{1-x^2-y^2+x^2y^2}{(1+xy)^2} = \frac{1-x^2-y^2(1-x^2)}{(1+xy)^2}$$

$$1 - \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 = \frac{1-x^2-y^2+x^2y^2}{(1+xy)^2} = \frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+xy)^2}$$

Or $x \in]-1;1[$ et $y \in]-1;1[$ donc : $|x| < 1$ et $|y| < 1$

donc : $x^2 < 1$ et $y^2 < 1$ on a donc : $1 - \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 > 0$

donc : $\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 < 1$ donc : $\sqrt{\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2} < \sqrt{1}$

donc : $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$ donc : $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$

donc : $\frac{x+y}{1+xy} \in]-1;1[$ cqfd

Exercice3 : on considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ calculer } A^2 \text{ et } A^3 \text{ et en déduire}$$

$$A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

solution :

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \times 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$ vraie si $n=1$

b) supposons que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) montrons que : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Exercice4 : on muni \mathbb{R} d'une loi de composition

interne $*$ défini par : $x * y = xy - 3x - 3y + 12$;

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et soit : $S =]3; +\infty[$

Montrer que S est une partie stable pour $(\mathbb{R}; *)$

Solution : soit $x \in S$ et $y \in S$

Montrons que : $x * y \in S$?

$$x * y - 3 = xy - 3x - 3y + 9 = x(y - 3) - 3(y - 3)$$

$$x * y - 3 = (y - 3)(x - 3)$$

or $x \in S =]3; +\infty[\Leftrightarrow x > 3$ et $y \in]3; +\infty[\Leftrightarrow y > 3$

donc : $x * y - 3 > 0$ donc : $x * y \in]3; +\infty[= S$ cqfd

donc : S est une partie stable pour $(\mathbb{R}; *)$

Exercice5 : 1) on muni \mathbb{R} d'une loi de composition

interne $*$ défini par : $a * b = a + b - 3ab$; $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que $*$ est commutative et associative

2) on muni \mathbb{R}^2 d'une loi de composition interne T

défini par : $(a, b) T (x, y) = (ax, ay + b)$; $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que T est ni commutative et ni associative dans \mathbb{R}^2

Solution: 1) Soit : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

a) On a : $a * b = a + b - 3ab = b + a - 3ba = b * a$

Donc : $*$ est commutative

b)

$$(a * b) * c = (a + b - 3ab) * c = a + b - 3ab + c - 3(a + b - 3ab)c$$

$$(a * b) * c = a + b + c - 3(ab + ac + bc) + 9abc$$

et on a :

$$a * (b * c) = a * (b + c - 3bc) = a + (b + c - 3bc) - 3a(b + c - 3bc)$$

$$a * (b * c) = a + b + c - 3(ab + ac + bc) + 9abc$$

Donc : $(a * b) * c = a * (b * c)$

Donc : $*$ est associative

2)a) on a : $(1; 3) T (2; 0) = (1 \times 2; 1 \times 0 + 3) = (2; 3)$

$$(2; 0) T (1; 3) = (2 \times 1; 2 \times 3 + 0) = (2; 6)$$

Donc : $(1; 3) T (2; 0) \neq (2; 0) T (1; 3)$ donc : T n'est pas commutative

b)

$$((1; 3) T (2; 0)) T (5; 7) = (2; 6) T (5; 7) = (2 \times 5; 2 \times 7 + 6) = (10; 20)$$

$$(1;3)T((2;0)T(5;7))=(1;3)T(2 \times 5; 2 \times 7 + 0)=(1;3)T(10;14)$$

$$(1;3)T((2;0)T(5;7))=(1 \times 10; 1 \times 14 + 3)=(10;17)$$

Donc : $((1;3)T(2;0))T(5;7) \neq (1;3)T((2;0)T(5;7))$

donc : T n'est pas associative

Exercice6 : on muni \mathbb{R} d'une loi de composition

interne * définit par : $a*b = ab - (a+b) + 2$;

$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$ 1) Monter que * est commutative

2) Monter que * admet un élément neutre et déterminer les éléments symétrisables

Solution:1) Soit : $\forall (a;b;c) \in \mathbb{R}^3$

a) On a : $a*b = ab - (a+b) + 2 = ba - (b+a) + 2 = b*a$

Donc : * est commutative

2)a) $\forall a \in \mathbb{R} : 2*a = 2a - (2+a) + 2 = a$ et

$$a*2 = 2a - (a+2) + 2 = a$$

Donc 2 est l'élément neutre pour la loi *

b) soit $a \in \mathbb{R}$ on cherche $a' \in \mathbb{R}$ tel que :

$a*a' = 2$ (* est commutative) ?

$$a*a' = 2 \Leftrightarrow aa' - (a+a') + 2 = 2 \Leftrightarrow a'(a-1) = a$$

Si : $a=1$ alors : $0=1 \Leftrightarrow a*a' = 2$ donc impossible

Si : $a \neq 1$ alors : $a' = \frac{a}{a-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a*a' = 2$

Donc : $\forall a \in \mathbb{R} - \{1\}$ il admet un symétrique

$$a' = \frac{a}{a-1}$$

Exercice7 : on muni \mathbb{R} d'une loi de composition

interne * définit par : $x*y = xy - 4x - 4y + 20$;

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$ 1) la loi * est-elle commutative ?

2) la loi * admet -elle un élément neutre et déterminer le s'il existe

3) déterminer les éléments symétrisables s'il existent

Solution:1) Soit : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$

a) On a : $x*y = xy - (x+y) + 2 = yx - (y+x) + 2 = y*x$

Donc : * est commutative

2) si l'élément neutre existe alors $\forall x \in \mathbb{R} : e*x = x$
(* est commutative)

$$\forall x \in \mathbb{R} : e*x = x \Leftrightarrow xe - 4x - 4e + 20 = x$$

$$\Leftrightarrow x(e-5) - 4e + 20 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e-5=0 \\ -4e+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=5 \\ e=5 \end{cases}$$

Donc 5 est l'élément neutre pour la loi *

3) soit $x \in \mathbb{R}$ on cherche $x' \in \mathbb{R}$ tel que :
 $x*x' = 5$ (* est commutative) ?

$$x*x' = 5 \Leftrightarrow xx' - 4x - 4x' + 20 = 5 \Leftrightarrow x'(x-4) = 4x-15$$

Si : $x=4$ alors : $0=1$ donc impossible

Si : $x \neq 4$ alors : $x' = \frac{4x-15}{x-4} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x*x' = 5$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} - \{4\}$ il admet un symétrique

$$x' = \frac{4x-15}{x-4}$$

Exercice8 : on muni \mathbb{R} d'une loi de composition

interne * définit par : $x*y = x+4y-1$; $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$

1) la loi * est-elle commutative ?

2) la loi * admet -elle un élément neutre et déterminer le s'il existe

Solution:1) On a : $0*1 = 0+4 \times 1 - 1 = 3$

$$1*0 = 1+4 \times 0 - 1 = 0$$

$$0*1 \neq 1*0$$

Donc : * est non commutative

2) si l'élément neutre existe alors $\forall x \in \mathbb{R} :$
 $e*x = x*e = x$

$$\forall x \in \mathbb{R} : e*x = x \Leftrightarrow e+4x-1 = x$$

$$\Leftrightarrow 3x+e-1=0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=0 \\ e-1=0 \end{cases}$$

Donc impossible

Donc la loi * n'admet pas d'éléments neutres

Exercice9 : on considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que : $A^2 - 2A + I_2 = 0$ et en déduire que

La matrice A est inversible et déterminer A^{-1}

2) calculer : B^2 et B^3 et en déduire que

La matrice B n'admet pas d'inverse

Solution

$$1) \text{ on a : } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } -2A + I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc : } A^2 - 2A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$A^2 - 2A + I_2 = 0 \Leftrightarrow A(A - 2I_2) = -I_2 \Leftrightarrow A(2I_2 - A) = I_2$$

$$\text{Et } A^2 - 2A + I_2 = 0 \Leftrightarrow (2I_2 - A)A = I_2$$

Donc : A est inversible et déterminer $A^{-1} = 2I_2 - A$

$$A^{-1} = 2I_2 - A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B \times B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc : } B^3 = 0_3$$

On suppose que B admet un inverse donc il

existe une matrice C tel que : $BC = CB = I_3$

$$\text{Donc : } BC = I_3 \Rightarrow B^2 BC = B^2 I_3 \Rightarrow 0_3 \times C = B^2$$

$$\Rightarrow 0_3 = B^2 \text{ or } B^2 \neq 0_3 \text{ contradiction}$$

Donc : B n'admet pas d'inverse dans $M_3(\mathbb{R})$

Exercice10 : on considère les matrices

$$\text{suivantes : } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) calculer : A^2 et A^3 et en déduire que

2) Montrer que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}$

3) Montrer que : $(A - I_2)^2 = 0_2$ avec $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) en déduire que La matrice A est inversible et déterminer A^{-1}

Solution

$$1) \text{ on a : } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Montrer par récurrence que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}$

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ vraie si } n=0$$

$$\text{supposons que : } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{montrons que : } A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc : } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}$$

3) Montrons que : $(A - I_2)^2 = 0_2$

$$(A - I_2)^2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$$

4) On a : $(A - I_2)^2 = 0_2 \Leftrightarrow A^2 - 2A + I_2 = 0_2$

$\Leftrightarrow A(2I_2 - A) = (2I_2 - A)A = I_2$

Donc : A est inversible et déterminer $A^{-1} = 2I_2 - A$

$$A^{-1} = 2I_2 - A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice11 : on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$$

Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

Solution : soit $M_{(a;b)} \in E$ et $M_{(x;y)} \in E$

Donc : $M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$ et $a^2 - 2b^2 = 1$

Et : $M_{(x;y)} = \begin{pmatrix} x & y\sqrt{2} \\ y\sqrt{2} & x \end{pmatrix}$ et $x^2 - 2y^2 = 1$

Montrons que : $M_{(a;b)} \times M_{(x;y)} \in E$?

$$M_{(a;b)} \times M_{(x;y)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y\sqrt{2} \\ y\sqrt{2} & x \end{pmatrix}$$

$$M_{(a;b)} \times M_{(x;y)} = \begin{pmatrix} ax + 2by & (ay + bx)\sqrt{2} \\ (ay + bx)\sqrt{2} & ax + 2by \end{pmatrix}$$

Donc : $M_{(a;b)} \times M_{(x;y)} = M_{(ax+2by; ay+bx)}$

$(ax+2by; ay+bx) \in \mathbb{Z}^2$

Car $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ et $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$

Et on a :

$$(ax + 2by)^2 - 2(ay + bx)^2 = (a^2x^2 + 4b^2y^2 + 4abxy)$$

$$- 2(a^2y^2 + b^2x^2 + 2abxy) = (a^2x^2 - 2a^2y^2) - 2(2b^2y^2 - b^2x^2)$$

$$= a^2(x^2 - 2y^2) - 2b^2(x^2 - 2y^2) = (x^2 - 2y^2)(a^2 - 2b^2) = 1 \times 1 = 1$$

donc : $M_{(a;b)} \times M_{(x;y)} \in E$

donc : E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

Exercice12 : soit l'application : $f : (\mathbb{Z}; +) \rightarrow (\mathbb{Z}^*; \times)$
 $x \mapsto 5^x$

montrons que f est un morphisme de $(\mathbb{Z}, +)$

dans (\mathbb{Z}^*, \times)

Solution : $\forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2$

$f(x+y) = 5^{x+y} = 5^x \times 5^y = f(x) \times f(y)$ donc : f est un morphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans (\mathbb{Z}^*, \times)

Exercice13 : soit l'application : $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln x$

montrons que g est un morphisme de :

$]0; +\infty[, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$

Solution : $\forall (x; y) \in]0; +\infty[^2$

$$g(x \times y) = \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y) = g(x) + g(y)$$

donc : g est un morphisme de $(]0; +\infty[, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$

Exercice14: soit l'application : $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$
 $z \mapsto |z|$

montrons que h est un morphisme de : (\mathbb{C}, \times) dans (\mathbb{R}, \times)

Solution : $\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2$

$h(z \times z') = |z \times z'| = |z| \times |z'| = h(z) \times h(z')$ donc : f est un morphisme de (\mathbb{C}, \times) dans (\mathbb{R}, \times)

Exercice15 : soit l'application :

$$k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$\theta \mapsto e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

montrons que k est un morphisme de : $(\mathbb{R}, +)$

dans (\mathbb{C}^*, \times) **Solution** : $\forall (\theta; \theta') \in \mathbb{R}^2$

$$k(\theta + \theta') = e^{i(\theta + \theta')} = e^{i\theta + i\theta'} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = k(\theta) \times k(\theta')$$

donc : k est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans (\mathbb{C}^*, \times)

$$l: \mathbb{R} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$$

Exercice16 : soit l'application : $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

montrons que l est un morphisme de : $(\mathbb{R}, +)$
dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ **Solution** : $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2$

$$\text{on a : } l(x+x') = \begin{pmatrix} 1 & x+x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l(x) \times l(x') = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc : } l(x+x') = l(x) \times l(x')$$

donc : l est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$
dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

Exercice17: soit f l'application : $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
 $n \mapsto \overline{2^n}$

montrons que f est un morphisme de $(\mathbb{N}, +)$
dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \times)$

Solution : $\forall (n; m) \in \mathbb{N}^2$

$$f(n+m) = \overline{2^{n+m}} = \overline{2^n \times 2^m} = \overline{2^n} \times \overline{2^m} = f(n) \times f(m)$$

donc : f est un morphisme de $(\mathbb{N}, +)$

dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \times)$

Exercice18 : on muni \mathbb{R}^2 de la loi de composition
interne suivante : $(a; b) + (a'; b') = (a+a'; b+b')$;

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall (a'; b') \in \mathbb{R}^2$$

Soit $A(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ l'ensemble des applications affines :

$$A(\mathbb{R}; \mathbb{R}) = \{ f_{(a;b)} / \forall x \in \mathbb{R} : f_{(a;b)}(x) = ax + b \}$$

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow A(\mathbb{R}; \mathbb{R})$$

Soit l'application : $\varphi: (a; b) \mapsto f_{(a;b)}$

Montrer que : φ est un morphisme de $(\mathbb{R}^2, +)$
dans $(A(\mathbb{R}; \mathbb{R}), +)$

Solution: 1) Soit : $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (a'; b') \in \mathbb{R}^2$

On a :

$$\varphi((a; b) + (a'; b')) = \varphi(a+a'; b+b') = f_{(a+a'; b+b')}$$

$$f_{(a+a'; b+b')}(x) = (a+a')x + (b+b') = (ax+b) + (a'x+b')$$

$$\text{Donc : } \varphi((a; b) + (a'; b')) = \varphi(a; b) + \varphi(a'; b')$$

donc : φ est un morphisme de $(\mathbb{R}^2, +)$

dans $(A(\mathbb{R}; \mathbb{R}), +)$

Exercice19 : soient $a \in]2; +\infty[$ et $b \in]2; +\infty[$

On pose : $a * b = (a-2)(b-2) + 2$

1) montrer que $*$ est une loi de composition interne

Dans $I =]2; +\infty[$

2) soit l'application définie sur \mathbb{R}^{**} vers I

$$\text{tel que : } f(x) = \frac{2x+1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{**}$$

a) montrer que f est un morphisme de $(\mathbb{R}^{**}, \times)$

dans $(I, *)$

b) en déduire que $*$ est associative et admet un
élément neutre a determiner

solution : 1) soient $a \in]2; +\infty[$ et $b \in]2; +\infty[$

$$a \in]2; +\infty[\Rightarrow a > 2 \text{ et } b \in]2; +\infty[\Rightarrow b > 2$$

$$\text{Donc : } (a-2)(b-2) > 0$$

$$\text{Donc : } (a-2)(b-2) + 2 > 2$$

$$\text{Donc : } a * b \in]2; +\infty[= I$$

Donc : $*$ est une loi de composition interne

Dans $I =]2; +\infty[$

2) soient $x \in \mathbb{R}^{**}$ et $y \in \mathbb{R}^{**}$

$$f(x \times y) = \frac{2xy+1}{xy}$$

$$f(x) * f(y) = \frac{2x+1}{x} * \frac{2y+1}{y} = \left(\frac{2x+1}{x} - 2 \right) \left(\frac{2y+1}{y} - 2 \right) + 2$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{1}{y} + 2 = \frac{2xy+1}{xy}$$

Donc : $f(x \times y) = f(x) * f(y) \quad \forall (x; y) \in (\mathbb{R}^{**})^2$

Donc : f est un morphisme de $(\mathbb{R}^{**}, \times)$ dans $(I, *)$

b) puisque \times est commutative dans $(\mathbb{R}^{**}, \times)$ et f

un homomorphisme de $(\mathbb{R}^{**}, \times)$ dans $(I, *)$

alors $*$ est commutative dans I

et on a 1 est l'élément neutre dans $(\mathbb{R}^{**}, \times)$

alors : $f(1) = 3$ est l'élément neutre dans I

Exercice20 : on muni \mathbb{R} d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a * b = ab + (a^2 - 1)(b^2 - 1)$;

$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$ 1) Monter que $*$ est commutative

2) Monter que $*$ n'est pas associative

3) est ce que la loi $*$ admet un élément neutre ?

4) résoudre dans \mathbb{R} les équations :

a) $2 * x = 5$ b) $x * x = 1$

Solution: 1) Soit : soit : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

On a : $a * b = ab + (a^2 - 1)(b^2 - 1) = ba + (b^2 - 1)(a^2 - 1)$

car la multiplication dans \mathbb{R} est commutative

Donc : $a * b = b * a$ par suite $*$ est commutative

2) on a : $(-1 * 0) * 2 = 0 * 2 = -3$

Et $-1 * (0 * 2) = -1 * -3 = 3$

Donc : $(-1 * 0) * 2 \neq -1 * (0 * 2)$

Donc : $*$ n'est pas associative

3) on a : $a * 1 = 1 * a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Donc : 1 est l'élément neutre pour la loi $*$
(l'élément neutre est unique)

4) a) on va résoudre l'équation : $2 * x = 5$

$$2 * x = 5 \Leftrightarrow 2x + 3(x^2 - 1) = 5 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = \frac{4}{3} \text{ donc : } S = \left\{ -2; \frac{4}{3} \right\}$$

b) on va résoudre l'équation : $x * x = 1$

$$x * x = 1 \Leftrightarrow x^2 + (x^2 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

donc : $S = \{-1; 0; 1\}$

Exercice21 : on muni \mathbb{R}^2 de la loi de composition

interne suivante : $(a; b) * (a'; b') = (a \times a'; b \times b')$;

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall (a'; b') \in \mathbb{R}^2$$

1) Monter que $*$ est commutative et associative

2) Monter que $*$ admet un élément neutre et déterminer dans \mathbb{R}^2 les éléments symétrisables
Pour la loi $*$

3) soit : $S = \mathbb{R} \times \{0\}$

a) montrer que S est une partie stable de $(\mathbb{R}^2, *)$

b) Monter que $(S, *)$ admet un élément neutre et

comparer les les éléments neutres de $(\mathbb{R}^2, *)$

et de $(S, *)$

Solution: 1) a) Montrons que $*$ est commutative ?

Soit : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a'; b') \in \mathbb{R}^2$

$$(a; b) * (a'; b') = (a \times a'; b \times b') = (a' \times a; b' \times b) = (a'; b') * (a; b)$$

Donc : $*$ est commutative

b) Montrons que $*$ est associative ?

Soit : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a'; b') \in \mathbb{R}^2$ et $(a''; b'') \in \mathbb{R}^2$

$$((a; b) * (a'; b')) * (a''; b'') = (a \times a'; b \times b') * (a''; b'')$$

$$((a;b)*(a';b'))*(a'';b'')=(a \times a' \times a''; b \times b' \times b'')$$

$$\text{On aussi : } (a;b)*((a';b')*(a'';b''))=(a;b)*(a' \times a''; b' \times b'')$$

$$(a;b)*((a';b')*(a'';b''))=(a \times a' \times a''; b \times b' \times b'')$$

Donc :

$$((a;b)*(a';b'))*(a'';b'')=(a;b)*((a';b')*(a'';b''))$$

Donc : * est associative

2)a) Montrons que * admet un élément neutre

$$\text{Soit: } (a;b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{On a : } (a;b)*(1;1)=(a;b) \quad \forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$$

Et puisque : * est commutative

Alors : * admet un élément neutre c'est (1;1)

b) déterminons dans \mathbb{R}^2 les éléments symétrisables pour la loi *

soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ on cherche $(a';b') \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$(a;b)*(a';b')=(1;1)$$

$$(a;b)*(a';b')=(1;1) \Leftrightarrow (a \times a'; b \times b')=(1;1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \times b' = 1 \\ a \times a' = 1 \end{cases} \text{ si } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \text{ alors } \begin{cases} a' = 1/a \\ b' = 1/b \end{cases}$$

Donc les éléments dans \mathbb{R}^2 symétrisables Pour la loi

* sont les couples $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que: $a \neq 0$ et $b \neq 0$

Et le symétrique de $(a;b)$ est $(1/a; 1/b)$ pour *

$$3)a) \quad S = \mathbb{R} \times \{0\}$$

$$\text{Soit : } (a;0) \in S \text{ et } (b;0) \in S$$

$$(a;0)*(b;0)=(ab;0) \in S$$

Donc : S est une partie stable de $(\mathbb{R}^2, *)$

$$b) \text{ soit : } (a;0) \in S$$

$$\text{on a : } (a;0)*(1;0)=(a;0) \text{ et } (1;0)*(a;0)=(a;0)$$

donc : (1;0) est élément neutre pour $(S, *)$

et on a (1;1) est élément neutre pour $(\mathbb{R}^2, *)$

$$\text{et : } (1;1) \neq (1;0)$$

Exercice22 : on muni \mathbb{C} de la loi de composition

interne T suivante : $zTz' = z\bar{z}'$; $\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2$

$$\forall (a'; b') \in \mathbb{R}^2 \quad (F, T) \quad \forall (z; z') \in \mathbb{C}^2$$

1) étudier la commutativité et l'associativité de T

2) résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $(zTz)Tz = i$

Solution :

1) la commutativité de T ?

$$\text{On a : } 1Ti = 1\bar{i} = -i \text{ et } iT1 = i\bar{1} = i$$

Donc : $1Ti \neq iT1$ donc T non commutative

L'associativité de T ?

$$(iT1)Ti = iTi = i \cdot (-i) = 1$$

$$iT(1Ti) = iT - i = i \cdot i = -1$$

Donc : $(iT1)Ti \neq iT(1Ti)$ donc T non associative

2) résolution dans \mathbb{C} l'équation : $(zTz)Tz = i$

$$(zTz)Tz = i \Leftrightarrow (z\bar{z})Tz = i \Leftrightarrow z\bar{z}\bar{z} = i \Leftrightarrow |z|^2 \bar{z} = i$$

On pose : $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$|z|^2 \bar{z} = i \Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x - iy) = i$$

$$|z|^2 \bar{z} = i \Leftrightarrow (x^2 + y^2)x - iy(x^2 + y^2) = i$$

$$|z|^2 \bar{z} = i \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)x = 0 \\ y(x^2 + y^2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \text{ ou } x = 0 \\ y(x^2 + y^2) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ 0 = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y^3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$|z|^2 \bar{z} = i \Leftrightarrow z = -i \text{ donc : } S = \{-i\}$$

Exercice23 : on muni $I =]0; +\infty[$ de la loi de composition interne $*$ suivante :

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall (x; y) \in I^2$$

soit f l'application définie sur I vers I

$$\text{tel que : } f(x) = x^2 \quad \forall x \in I$$

1) montrer que : $f(x * y) = f(x) + f(y)$

2) a) montrer que $*$ est associative

b) est ce que $*$ admet un élément neutre

3) soit $a \in I$ calculer : $A = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}} \quad n \in \mathbb{N}^*$

Solution : soit $(x; y) \in I^2$

$$1) f(x * y) = (x * y)^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2 = f(x) + f(y) \quad \text{Cqfd}$$

$$2) f(x * y) = f(x) + f(y)$$

Donc f est un homomorphisme et puisque

f est une bijection donc f est un isomorphismes

De $(I; *)$ dans $(I; +)$ donc : $(I; *)$ et $(I; +)$

Ont la même structures et puisque $+$ est associative dans I alors $*$ est aussi associative

Et puisque $(I; +)$ n'admet pas d'élément neutre

alors : $(I; *)$ n'admet pas d'élément neutre

$$3) f\left(\underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}}\right) = \underbrace{f(a) + f(a) + \dots + f(a)}_{n \text{ fois}}$$

$$f(A) = n f(a) = na^2$$

Et puisque f est un isomorphismes de $(I; *)$

dans $(I; +)$ donc : $A = f^{-1}(na^2)$

Et puisque : $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ donc $A = \sqrt{na^2} = \sqrt{na}$

Exercice24 : 1) on muni \mathbb{R} d'une loi de composition interne $*$ définie par : $x * y = x + y - xy$; $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

soit f l'application définie sur \mathbb{R} vers \mathbb{R}

$$\text{tel que : } f(x) = 1 - x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1) montrer que f est un homomorphisme bijectif

De $(\mathbb{R}; *)$ dans $(\mathbb{R}; \times)$

2) en déduire que $*$ est associative et que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera

3) déterminer l'ensemble des éléments symétrisables pour la loi $*$

4) soit $a \in \mathbb{R}$ calculer : $A = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}} \quad n \in \mathbb{N}^*$

Solution : 1) $f(x) = 1 - x$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 1 - x = y \Leftrightarrow x = 1 - y$$

$$\text{Donc : } f^{-1}(x) = 1 - x = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc : } f^{-1} = f$$

$$f(x * y) = 1 - x * y = 1 - (x + y - xy)$$

$$= (1 - x)(1 - y) = f(x) \times f(y)$$

Donc : f est un isomorphismes de $(\mathbb{R}; *)$ dans

$(\mathbb{R}; \times)$

2) puisque f est un isomorphismes de $(\mathbb{R}; *)$

dans $(\mathbb{R}; \times)$ alors : $(\mathbb{R}; *)$ et $(\mathbb{R}; \times)$

Ont la même structure et puisque \times est

associative dans \mathbb{R} alors $*$ est aussi associative dans \mathbb{R} et puisque 1 est élément neutre dans

$(\mathbb{R}; \times)$ alors $f^{-1}(1) = f(1) = 0$ est élément neutre

dans $(\mathbb{R}; *)$

3) on a 0 est élément neutre unique qui n'admet pas de symétrique dans $(\mathbb{R}; \times)$ et on a $f(0) = 1$

Donc : l'ensemble des éléments symétrisables

pour $(\mathbb{R}; *)$ est $\mathbb{R} - \{1\}$

$$4) f(A) = f\left(\underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}}\right) = \underbrace{f(a) \times f(a) \times \dots \times f(a)}_{n \text{ fois}}$$

$$f(A) = (f(a))^n = (1-a)^n$$

$$\text{Donc : } A = f^{-1}\left((1-a)^n\right) = f\left((1-a)^n\right) = 1 - (1-a)^n$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et

exercices Que l'on devient un mathématicien

