

## (I) عموميات:

### (1) تعريف:

نقبل الخاصية التالية:

توجد مجموعة نرمز لها بـ  $\mathbb{C}$  تحتوي على  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  وتحقق ما يلي:

(1) تحتوي المجموعة  $\mathbb{C}$  على عنصر غير حقيقي نرمز له بـ  $i$  ويحقق  $i^2 = -1$

(2) كل عنصر  $z$  من  $\mathbb{C}$  يكتب بطريقة وحيدة على شكل:  
 $z = a + ib$  مع  $a, b \in \mathbb{R}$

(3) المجموعة  $\mathbb{C}$  مزودة بعمليتي الجمع والضرب اللتان تمددان عمليتي الجمع والضرب في  $\mathbb{R}$  ولهما نفس الخاصيات.

### ملاحظات:

(\*)  $\mathbb{C} = \{z = a + ib / a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

(\*)  $\mathbb{C}$  تسمى مجموعة الأعداد العقدية وكل عنصر من  $\mathbb{C}$  يسمى عدد عقدي.

(\*) ليكن  $z = a + ib$  من  $\mathbb{C}$  مع  $b \neq 0$  من  $\mathbb{R}$ . هذه الكتابة تسمى الشكل الجبري للعدد  $z$ .

العدد  $a$  يسمى الجزء الحقيقي لـ  $z$ . نكتب  $\text{Re}(z) = a$ .

العدد  $b$  يسمى الجزء التخيلي لـ  $z$ . نكتب  $\text{Im}(z) = b$ .

إذا كان  $b = 0$  فإن  $z = a \in \mathbb{R}$

إذا كان  $a = 0$  فإن  $z = ib$  ونقول  $z$  تخيلي صرف:  $z \in i\mathbb{R}$ .

### أمثلة:

(\*)  $z = 2 - 3i$  لدينا  $\text{Re}(z) = 2$  و  $\text{Im}(z) = -3$

(\*)  $z = -4i$  و  $\text{Re}(z) = 0$  و  $\text{Im}(z) = -4$

لدينا  $z \in i\mathbb{R}$ .

### (2) قواعد الحساب في $\mathbb{C}$ .

#### (a) تساوي عددين عقديين:

ليكن  $z = a + ib$  و  $z' = a' + ib'$  من  $\mathbb{C}$  بما أن كل عدد عقدي يكتب بطريقة وحيدة على شكله الجبري. فإن:  $z = z' \Leftrightarrow a = a' \text{ و } b = b'$ .

لدينا  $\begin{cases} z = a + ib \\ 0 = 0 + i0 \end{cases}$  من  $z = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ و } b = 0$

### خاصية:

ليكن  $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$  لدينا:

(\*)  $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a' \text{ و } b = b'$  هذا يعني:

$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$

(\*)  $a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ و } b = 0$

هذا يعني:  $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = 0 \\ \text{Im}(z) = 0 \end{cases}$

#### (b) بنية $(\mathbb{C}, +, \times)$

(\*) الجمع تجميعي وتبادلي في  $\mathbb{C}$ .

(\*) الجمع يقبل عنصرا محايدا هو  $0$ :  $0 + z = z + 0 = z$

(\*) كل عنصر  $z$  من  $\mathbb{C}$  يقبل مقابلا نرمز له بـ  $-z$ :

$z + (-z) = (-z) + z = 0$

(\*) نلخص الخاصيات السابقة بقولنا  $(\mathbb{C}, +)$  زمرة تبادلية.

(\*) الضرب تجميعي وتبادلي في  $\mathbb{C}$ .

(\*) الضرب توزيعي بالنسبة للجمع:  $z(z' + z'') = zz' + zz''$

← نلخص الخاصيات السابقة بقولنا:

$(\mathbb{C}, +, \times)$  حلقة تبادلية.

(\*) العدد 1 هو العنصر المحايد في  $\mathbb{C}$  بالنسبة للضرب.

(\*) كل عنصر من  $\mathbb{C}^*$  يقبل مقلوبا نرمز له بـ  $\frac{1}{z}$  أو  $z^{-1}$

$$\frac{1}{z} \times z = z \times \frac{1}{z} = 1$$

← نلخص كل الخاصيات السابقة بقولنا:  $(\mathbb{C}, +, \times)$  جسم

تبادلي.

### خاصية: $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي.

#### (c) الجمع والضرب في $\mathbb{C}$ :

ليكن  $z = a + ib$  و  $z' = a' + ib'$  من  $\mathbb{C}$  مع  $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ .

(\*) لدينا:  $z + z' = (a + ib) + (a' + ib')$

$$= a + ib + a' + ib'$$

$$= a + a' + ib + ib'$$

$$= a + a' + i(b + b')$$

(\*) لدينا:  $zz' = (a + ib)(a' + ib')$

$$= aa' + ib'a + iba' - bb'$$

$$= (aa' - bb') + i(b'a + ba')$$

### خاصية:

ليكن  $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$  لدينا:

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(b'a + ba')$$

#### (d) مقابل ومقلوب عدد عقدي:

(\*) ليكن  $z = a + ib$  من  $\mathbb{C}$ .

لنبحث عن  $z'$  بحيث  $z + z' = 0$

$$z' = a' + ib'$$

$$z + z' = 0 \Leftrightarrow (a + a') + i(b + b') = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = -a \\ b' = -b \end{cases}$$

إذن:  $z' = -a + i(-b)$

$$\boxed{-z = -a + i(-b)} \text{ مقابل } z = a + ib \text{ هو}$$

(\*) ليكن  $z = a + ib$  من  $\mathbb{C}^*$

لنبحث عن  $z'$  بحيث  $zz' = 1$

$$z' = a' + ib'$$

$$zz' = 1 \Leftrightarrow (aa' - bb') + i(b'a + ba') = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ ba' + b'a = 0 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2$$

ولدينا  $z \in \mathbb{C}^*$  إذن  $a \neq 0$  أو  $b^2 \neq 0$

إذن  $a^2 > 0$  أو  $b^2 > 0$  إذن  $\Delta \neq 0$

### أمثلة:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= 2+4i & z &= 2-4i \quad (*) \\ \bar{z} &= -1+i & z &= -1-i \quad (*) \\ \bar{z} &= -2i-4 & z &= 2i-4 \quad (*) \\ \bar{z} &= 5 & z &= 5 \quad (*) \\ \bar{z} &= -2i & z &= 2i \quad (*)\end{aligned}$$

### (2) خاصيات:

1- ليكن  $z = a+ib$  من  $\mathbb{C}$  مع  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$ .

$$\bar{z} = a-ib \quad (*)$$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow a+ib = a-ib$$

$$\Leftrightarrow 2ib = 0 \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

$$\Leftrightarrow z = a$$

$$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

(\*) ولدينا:

$$\bar{\bar{z}} = -z \Leftrightarrow a-ib = -a-ib$$

$$\Leftrightarrow 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0$$

$$\Leftrightarrow z = ib$$

$$\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

إذن

$$\bar{\bar{z}} = z \quad ; \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad (2)$$

(3) ليكن  $z = a+ib$  و  $z' = a'+ib'$  من  $\mathbb{C}$

$$z+z' = (a+a') + i(b+b')$$

إذن:

$$\overline{z+z'} = (a+a') - i(b+b')$$

$$= a-ib + a'-ib'$$

$$= \bar{z} + \bar{z}'$$

إذن

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n \quad ; \quad \text{و}$$

(4) ليكن  $z = x+iy$  من  $\mathbb{C}$  مع  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$

$$\bar{z} = x-iy \quad \text{لدينا:}$$

$$z + \bar{z} = 2x = 2\text{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2iy = 2i\text{Im}(z)$$

$$z.\bar{z} = x^2 + y^2$$

(5) ليكن  $z = a+ib$  و  $z' = a'+ib'$  من  $\mathbb{C}$  مع  $a, b, a', b'$  من  $\mathbb{R}$ .

لدينا:

$$z.z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

$$\bar{z}\bar{z}' = (aa' - bb') - i(ab' + ba')$$

ولدينا:

$$\bar{z}.\bar{z}' = (a-ib)(a'-ib')$$

$$= aa' - ib'a - iba' - bb'$$

$$= (aa' - bb') - i(ab' + ba')$$

$$\bar{z}.\bar{z}' = \overline{z.z'} \quad \text{إذن:}$$

$$\Delta_{a'}^* = \begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix} = a \quad \Delta_{b'} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b$$

$$b' = \frac{-b}{a^2+b^2}; \quad a' = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{إذن}$$

$$z' = \frac{a}{a^2+b^2} + i \frac{-b}{a^2+b^2} \quad \text{إذن:}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i \frac{-b}{a^2+b^2} \quad \text{هو: } z = a+ib \quad \text{مقلوب}$$

ملاحظة:

عمليا للحصول على مقلوب عدد عقدي يتبع ما يلي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2}$$

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$$

(e) متطابقات هامة:

جميع المتطابقات الهامة التي نعرفها في  $\mathbb{R}$  تبقى صحيحة في  $\mathbb{C}$ .

(f) قوى العدد  $i$ :

$$i^3 = i^2.i = -i \quad i^2 = -1$$

$$i^4 = i^2.i^2 = 1$$

$$i^5 = i^4.i = i$$

ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$

$$i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1 \quad ; \quad n = 4k \quad (*)$$

$$i^n = i^{4k+1} = i^{4k}.i = i \quad ; \quad n = 4k+1 \quad (*)$$

$$i^n = i^{4k+2} = i^{4k}.i^2 = -1 \quad ; \quad n = 4k+2 \quad (*)$$

$$i^n = i^{4k+3} = i^{4k}.i^3 = -i \quad ; \quad n = 4k+3 \quad (*)$$

$$i^n = \begin{cases} 1; & n = 4k \\ i; & n = 4k+1 \\ -1; & n = 4k+2 \\ -i; & n = 4k+3 \end{cases} \quad \text{إذن:}$$

تمرين تطبيقي:

(\*) حساب:

$$z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100} = \left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{50}$$

$$= \left(\frac{(1+i)^2}{2}\right)^{50} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{50} = i^{50} = i^{4 \times 12 + 2}$$

$$= (i^4)^{12} \times i^2 = -1$$

ملاحظة:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100} = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$$

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} \neq -\frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \frac{1+i}{\sqrt{2}} \neq \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$u^n = v^n \Rightarrow u = v \quad \text{أو} \quad u = -v$$

(II) مرافق عدد عقدي:

(1) تعريف.

ليكن  $z = a+ib$  من  $\mathbb{C}$  مع  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$ .

نسمي مرافق العدد  $z$  العدد الذي نرمز له ب  $\bar{z}$  المعروف بما يلي:

$$\bar{z} = a-ib$$

$$\begin{aligned}
u &= (a+2i)^n + (a-2i)^n \\
&= (a+2i)^n + \overline{(a+2i)^n} \\
&= (a+2i)^n + \overline{(a+2i)^n} = 2\text{Re}((a+2i)^n) \\
&\quad u \in \mathbb{R} \quad \text{إذن} \\
\bar{v} &= \overline{(a+2i)^n - (a-2i)^n} \\
&= \overline{(a+2i)^n} - \overline{(a-2i)^n} \\
&= (a-2i)^n - (a+2i)^n = -v \\
&\quad v \in i\mathbb{R} \quad \text{إذن} \quad v = -\bar{v} \\
&\quad \text{طريقة (2):}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v &= (a+2i)^n - (a-2i)^n \\
&= (a+2i)^n - \overline{(a+2i)^n} \\
&= (a+2i)^n - \overline{(a+2i)^n} = 2i\text{Im}((a+2i)^n) \\
&\quad v \in i\mathbb{R} \quad \text{إذن}
\end{aligned}$$

### تمرين 2

حل في  $\mathbb{C}$  المعادلات التالية

$$(1+i)z - 2iz + 1 - i = 3z - i \quad (1)$$

$$(1+i)z - (2i+1)\bar{z} + 1 - i = 3z - i \quad (2)$$

$$iz\bar{z} - (2i+1)\bar{z} + 2 - i = 1 + i \quad (3)$$

### III - معيار عدد عقدي: Module d'un complexe

#### 1 - تعريف:

ليكن  $z = a + ib$  من  $\mathbb{C}$  مع  $a, b$  من  $\mathbb{R}$   
نسمي معيار العدد  $z$  العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب  $|z|$   
والمعرف بما يلي:  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

#### أمثلة:

$$|z| = \sqrt{2} \quad : \quad z = 1 - i \quad (*)$$

$$|z| = 5 \quad : \quad z = 3 + 4i \quad (*)$$

$$|z| = 4 \quad : \quad z = -4 \quad (*)$$

$$|z| = 3 \quad : \quad z = 3 \quad (*)$$

$$|z| = 5 \quad : \quad z = -5i \quad (*)$$

#### ملاحظات:

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |z| \in \mathbb{R}^+ \quad (*)$$

(\*) إذا كان  $z = a \in \mathbb{R}$  قيمة مطلقة  $\rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$  معيار.

$$|z| = \sqrt{b^2} = |b| \quad (b \in \mathbb{R}) \quad z = ib \quad (*)$$

(\*) ليكن  $z = x + iy$  مع  $x, y$  من  $\mathbb{R}$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

(\*)  $|z|^2 \in \mathbb{R}^+$  و  $z^2 \in \mathbb{C}$  لأن  $|z|^2 \neq z^2$

(\*) ليكن  $z' \neq 0$  من  $\mathbb{C}$  بحيث

$$\frac{z}{z'} = \frac{z \bar{z}'}{z' \bar{z}'} = \frac{z \bar{z}'}{|z'|^2} \quad \text{لدينا:}$$

$$\begin{aligned}
\overline{z \cdot z'} &= \bar{z} \cdot \bar{z}' \\
\overline{z_1 \cdot z_2 \cdots z_n} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n \\
\overline{z^n} &= (\bar{z})^n \quad (n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

إذن:

(6) ليكن  $z' \neq 0$  من  $\mathbb{C}$  بحيث

$$\frac{z}{z'} \cdot z' = z \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{z}{z'} \cdot z' = \bar{z} \quad \text{إذن:}$$

$$\left(\frac{z}{z'}\right) \cdot z' = \bar{z} \quad \text{يعني:}$$

$$\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{z'} \quad \text{إذن:}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \\
\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} &= \frac{1}{\bar{z}'}
\end{aligned}$$

(7) نعتبر الحدودية

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

حيث المعاملات  $a_i$  حقيقية. ( $a \in \mathbb{R}$ )

نفترض أن  $\alpha$  حل للمعادلة  $P(z) = 0$

لنبين أن  $\bar{\alpha}$  حل للمعادلة  $P(z) = 0$  يعني  $P(\bar{\alpha}) = 0$

لدينا  $\alpha$  حل ل  $P(z) = 0$  يعني:  $P(\alpha) = 0$

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \quad \text{يعني:}$$

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = \bar{0} \quad \text{يعني:}$$

$$\overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0} = \overline{0} = 0 \quad \text{يعني:}$$

ولدينا  $a_i \in \mathbb{R}$  إذن  $\bar{a}_i = a_i$

$$a_n \bar{\alpha}^n + a_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{\alpha} + a_0 = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$P(\bar{\alpha}) = 0 \quad \text{يعني:}$$

إذن  $\bar{\alpha}$  حل للمعادلة  $P(z) = 0$ .

#### خاصية:

لنكن  $P(z)$  حدودية معاملاتها حقيقية.

إذا كان  $\alpha$  حلا للمعادلة  $P(z) = 0$  فإن  $\bar{\alpha}$  حل ل  $P(z) = 0$ .

#### تمارين تطبيقية:

#### تمرين 1

نعتبر العددين:

$$u = (a+2i)^n + (a-2i)^n, \quad v = (a+2i)^n - (a-2i)^n$$

حيث  $a \in \mathbb{R}$

\* بين أن  $u$  حقيقي و  $v$  تخيلي صرف:

$$\bar{u} = \overline{(a+2i)^n + (a-2i)^n} \quad \text{لدينا:}$$

$$= (a+2i)^n + (a-2i)^n$$

$$= \overline{(a+2i)^n} + \overline{(a-2i)^n}$$

$$= (a-2i)^n + (a+2i)^n \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$= u$$

$$u \in \mathbb{R} \quad \text{إذن} \quad u = \bar{u}$$

طريقة أخرى:

## مثال:

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{|c+id|^2} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$$

## (2) خاصيات:

1- ليكن  $z = a+ib$  من  $\mathbb{C}$

$$\text{لدينا } \begin{cases} a^2 \leq a^2 + b^2 \\ b^2 \leq a^2 + b^2 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \\ |b| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\text{إذن } \begin{cases} a \leq |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \\ b \leq |b| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

## خاصية:

$$\begin{aligned} \text{Re}(z) &\leq |\text{Re}(z)| \leq |z| \\ \text{Im}(z) &\leq |\text{Im}(z)| \leq |z| \end{aligned}$$

2- ليكن  $z = a+ib$  من  $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\Leftrightarrow |z|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 0 \wedge b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0 \end{aligned}$$

## خاصية:

$$(\forall z \in \mathbb{C}) |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

3- ليكن  $z'$  من  $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |zz'|^2 &= zz' \cdot \overline{zz'} = zz' \cdot \overline{z} \cdot \overline{z'} \\ &= z \cdot \overline{z} \cdot z' \cdot \overline{z'} = |z|^2 \cdot |z'|^2 \\ &= (|z| \cdot |z'|)^2 \\ |zz'| &= |z| \cdot |z'| \end{aligned}$$

## خاصية:

$$\begin{aligned} |z \cdot z'| &= |z| \cdot |z'| \\ \left| \prod_{i=1}^n z_i \right| &= \prod_{i=1}^n |z_i| \\ |z^n| &= |z|^n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

4- ليكن  $z'$  من  $\mathbb{C}$  بحيث  $z' \neq 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{z}{z'} \right|^2 &= \left( \frac{z}{z'} \right) \left( \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \right) \\ &= \frac{z \cdot \overline{z}}{z' \cdot \overline{z'}} = \frac{|z|^2}{|z'|^2} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{إذن:}$$

## خاصية:

$z' \neq 0$  من  $\mathbb{C}$  بحيث

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|}$$

5- ليكن  $z'$  من  $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |z+z'| &\leq |z| + |z'| \quad \text{لنبين أن} \\ &\text{لدينا:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= (z+z') \cdot (\overline{z+z'}) \\ &= (z+z') \cdot (\overline{z} + \overline{z'}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\ &= |z|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} + |z'|^2 \\ z\overline{z'} + z'\overline{z} &\leq 2|z||z'| \quad \text{لنبين أن} \\ z\overline{z'} + z'\overline{z} &= z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} = 2\text{Re}(z\overline{z'}) \quad \text{لدينا:} \\ \text{Re}(z\overline{z'}) &\leq |z\overline{z'}| \quad \text{ونعلم أن:} \\ 2\text{Re}(z\overline{z'}) &\leq 2|z\overline{z'}| \quad \text{يعني:} \\ z\overline{z'} + z'\overline{z} &\leq 2|z||z'| \end{aligned}$$

$$|z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|$$

$$|z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2 \quad \text{إذن:}$$

$$|z+z'| \leq |z|+|z'|$$

## خاصية:

## تمارين تطبيقية:

**تمرين 1** أحسب معيار العدد  $z$  في الحالات التالية:

$$z = (1-i)^3 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{100} \quad (*)$$

لدينا:

$$\begin{aligned} |z| &= \left| (1-i)^3 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{100} \right| \\ &= |1-i|^3 \left| \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{100} \right| \\ &= |1-i|^3 \left| \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right|^{100} \\ &= \sqrt{3}^2 \cdot 1^{100} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$z = \frac{\left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \times i}{(3-4i)^2} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} |z| &= \frac{\left| \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \right| \times |i|}{|(3-4i)^2|} \\ &= \frac{1^n \cdot 1}{25} = \frac{1}{25} \end{aligned}$$

$$z \in \mathbb{C} - \left\{ \frac{-i}{2} \right\} \quad \text{ليكن } \mathbf{تمرين 2}$$

$$u = \frac{z+2i}{2z+i} \quad \text{ونعتبر العدد}$$

$$|u|=1 \Leftrightarrow |z|=1 \quad \text{بين أن:}$$

$$M' = S_{(o, \bar{e}_1)}(M) \Leftrightarrow aff(M') = \overline{aff(M)}$$

$$M' = S_0(M) \Leftrightarrow aff(M') = -aff(M)$$

3- لتكن  $M$  لحقها  $M(a, b)$   $z = a + ib$

$$OM = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2}$$

لدينا:

$$= \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

### خاصية

$$OM = |aff(M)| \quad : \text{ لكل } M \text{ من } P$$

### تمارين تطبيقية:

1- نعتبر النقطة  $A(-3+4i)$ . بين أن  $A$  تنتمي إلى الدائرة ( $\xi$ ) التي مركزها  $o$  وشعاعها 5.

$$OA = |aff(A)| = |-3+4i|$$

لدينا:

$$= \sqrt{9+16} = 5$$

إذن:  $A \in (\xi)$

2- نعتبر المجموعة:  $E = \{M(z) / |z| = 5\}$  حدد طبيعة  $E$  وعناصرها المميزة.

$$M(z) \in E \Leftrightarrow |z| = 5$$

$$\Leftrightarrow |z| = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow OM = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow M \in \xi\left(0, \frac{5}{2}\right)$$

إذن  $E$  هي الدائرة ( $\xi$ ) التي مركزها  $o$  وشعاعها  $\frac{5}{2}$ .

طريقة (2):

لنحدد معادلة ديكارتية ل  $E$ :

نضع  $z = x + iy$ . إذن:

$$M(z) \in E \Leftrightarrow |z| = 5$$

$$\Leftrightarrow |z| = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$$

وهذه معادلة دائرة مركزها  $o$  وشعاعها  $\frac{5}{2}$

إذن  $E$  على  $\xi\left(0, \frac{5}{2}\right)$ .

### (2) لحن متجهة:

#### (a) تعريف:

لكل متجهة  $\bar{u}(a, b)$  العدد  $z = a + ib$  يسمى لحن المتجهة  $\bar{u}$

$$\text{و نكتب } aff(\bar{u}) = z$$

ولكل  $z = a + ib$  المتجهة  $\bar{u}(a, b)$  تسمى صورة العدد  $z$  في

المستوى المتجهي  $v_2$ . نكتب  $\bar{u}(z)$ .

$$|u| = 1 \Leftrightarrow |u|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow u \cdot \bar{u} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+2i}{2z+i} \cdot \frac{\bar{z}+2i}{2\bar{z}+i} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+2i}{2z+i} \cdot \frac{\bar{z}-2i}{2\bar{z}-i} = 1$$

$$\Leftrightarrow (z+2i)(\bar{z}-2i) = (2z+i)(2\bar{z}-i)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - 2iz + 2i\bar{z} - 4 = 4z\bar{z} - 2iz + 2i\bar{z} + 1$$

$$\Leftrightarrow 3z\bar{z} = 3$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} = 1$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow |z| = 1$$

### IV- التمثيل الهندسي لعدد عقدي:

نفترض في كل ما يلي أن المستوى منسوب إلى  $M, o, \bar{e}_1, \bar{e}_2$

#### 1- لحن نقطة: affixe d'un point

##### (a) تعريف:

(\* لكل نقطة  $M(a, b)$  العدد  $z = a + ib$  يسمى لحن النقطة  $M$  ونكتب:  $aff(M) = z$

(\* لكل  $z = a + ib$  من  $C$  النقطة  $M(a, b)$  تسمى صورة  $z$  في المستوى العقدي. ونكتب  $M(z)$ .

##### أمثلة:

(\* صورة العدد  $1+i$  هي  $A(1, 1)$

(\* صورة العدد  $1-2i$  هي  $B(1, -2)$

(\* صورة العدد 2 هي  $C(2, 0)$

(\* صورة العدد  $-2$  هي  $D(-2, 0)$

(\* صورة العدد  $2i$  هي  $E(0, 2)$

(\* صورة العدد  $-3i$  هي  $F(0, -3)$

##### ملاحظة:

المستوى ( $P$ ) منسوب إلى  $M(o, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$  يسمى مستوى عقدي.

محور الأفاصل مكون من صور لأعداد الحقيقية ويسمى محور حقيقي.

محور الأرتاب مكون من صور الأعداد التخيلية صرف ويسمى محور تخيلي.

$$M \in (o, \bar{e}_1) \Leftrightarrow aff(M) \in \mathbb{R}$$

$$M \in (o, \bar{e}_2) \Leftrightarrow aff(M) \in i\mathbb{R}$$

##### (b) خاصيات:

1- التطبيق  $f: C \rightarrow P$  تقابل.

$$z \rightarrow M(z)$$

$$aff(M) = aff(M') \Leftrightarrow M = M'$$

2- لتكن  $M(z) = a + ib$  مع

لدينا  $\bar{z} = a - ib$  إذن  $M'(\bar{z})$  هي مماثلة  $M(z)$  بالنسبة لمحور الأفاصل.

ولدينا  $-z = -a - ib$  إذن  $M''(-z)$  هي مماثلة  $M(z)$  بالنسبة لأصل المعلم.

## (b) خاصيات:

التطبيق  $f: \mathbb{C} \rightarrow V_2$  تقابل.

$$z \rightarrow \bar{u}(z)$$

$$\bar{u} = \bar{v} \Leftrightarrow \text{aff}(\bar{u}) = \text{aff}(\bar{v})$$

$$z = z' \Leftrightarrow \bar{u}(z) = \bar{v}(z')$$

2- لتكن  $\bar{u}(z)$  و  $\bar{v}(z')$

مع  $z = a + ib$  و  $z' = a' + ib'$

لدينا  $\bar{u}(a, b)$  و  $\bar{v}(a', b')$  إذن  $\bar{u} + \bar{v}(a + a', b + b')$

$$\text{aff}(\bar{u} + \bar{v}) = a + a' + i(b + b')$$

$$= a + ib + a' + ib'$$

إذن:

$$= z + z' = \text{aff}(\bar{u}) + \text{aff}(\bar{v})$$

ليكن  $\alpha \in \mathbb{R}$  :  $\alpha \bar{u}(\alpha a, \alpha b)$

$$\text{aff}(\alpha \bar{u}) = \alpha a + \alpha ib = \alpha(a + ib) = \alpha z$$

$$= \alpha \text{aff}(\bar{u})$$

**خاصية:**

لتكن  $\bar{u}$  و  $\bar{v}$  من  $V_2$  و  $\alpha$  و  $\beta$  من  $\mathbb{R}$

$$\text{aff}(\bar{u} + \bar{v}) = \text{aff}(\bar{u}) + \text{aff}(\bar{v})$$

لدينا:

$$\text{aff}(\alpha \bar{u}) = \alpha \text{aff}(\bar{u})$$

$$\text{aff}(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha \text{aff}(\bar{u}) + \beta \text{aff}(\bar{v})$$

3- لتكن  $\bar{u}(z)$  مع  $z = a + ib$  و  $\bar{u}(a, b)$

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| = |\text{aff}(\bar{u})|$$

لدينا:

$$\|\bar{u}\| = |\text{aff}(\bar{u})|$$

لكل  $\bar{u}$  من  $V_2$  لدينا:

4- لتكن  $M(z)$  و  $M'(z')$  مع  $z = a + ib$  و  $M(a, b)$

$$M'(a', b'): z' = a' + ib'$$

$$\overline{MM'}(a' - a, b' - b)$$

$$\text{aff}(\overline{MM'}) = a' - a + i(b' - b)$$

$$= a' + ib' - (a + ib) = z' - z = \text{aff}(M') - \text{aff}(M)$$

$$MM' = \|\overline{MM'}\| = |\text{aff}(\overline{MM'})|$$

ولدينا:

$$= |\text{aff}(M') - \text{aff}(M)|$$

**خاصية:**

لكل  $M$  و  $M'$  من  $P$ :

$$\text{aff}(\overline{MM'}) = \text{aff}(M') - \text{aff}(M)$$

$$MM' = |\text{aff}(M') - \text{aff}(M)|$$

**تمارين تطبيقية:**

**تمرين 1** نعتبر النقط  $A(i); B(1+2i); C(3+i); D(2)$

بين أن  $ABCD$  متوازي أضلاع.

لتبين أن  $\overline{AB} = \overline{DC}$

$$\text{aff}(\overline{AB}) = \text{aff}(B) - \text{aff}(A)$$

$$= 1 + 2i - i = 1 + i$$

لدينا:

$$\text{aff}(\overline{DC}) = \text{aff}(C) - \text{aff}(D)$$

$$= 3 + i - 2 = 1 + i$$

$$\text{إذن } \text{aff}(\overline{AB}) = \text{aff}(\overline{DC})$$

ومنه:  $\overline{AB} = \overline{DC}$

وبالتالي  $ABCD$  متوازي الأضلاع.

## تمرين 2

نعتبر النقط  $A(1); B(j); C(\bar{j})$  مع  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

بين أن  $ABC$  متساوي أضلاع.

$$AB = |\text{aff}(B) - \text{aff}(A)| \quad \text{لدينا:}$$

$$= \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right| = \left| -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$AC = |\text{aff}(C) - \text{aff}(A)| = \left| -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right|$$

$$= \left| -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$BC = |\text{aff}(C) - \text{aff}(B)| = \left| -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|$$

$$= \left| -2i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$AB = BC = AC \quad \text{إذن:}$$

ومنه  $ABC$  متساوي الأضلاع.

5- ليكن  $z_1$  عدد عقدي صورته  $A_1$

ليكن  $z_2$  عدد عقدي صورته  $A_2$

لنحدد صورة  $z_1 + z_2$ .

لدينا:

$$z_1 + z_2 = \text{aff}(\overline{OA_1}) + \text{aff}(\overline{OA_2})$$

$$= \text{aff}(\overline{OA_1 + OA_2})$$

لتكن  $A$  النقطة بحيث  $\overline{OA} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2}$

(متوازي أضلاع  $OA_1AA_2$ )

$$\text{إذن } z_1 + z_2 = \text{aff}(\overline{OA}) = \text{aff}(A)$$

**خاصية:**

إذا كان  $z_1$  لحق النقطة  $A_1$  و  $z_2$  لحق  $A_2$  فإن  $z_1 + z_2$  هو لحق

النقطة  $A$  بحيث  $\overline{OA} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2}$  أي  $OA_1AA_2$  متوازي أضلاع.

6- ليكن  $z$  عدد عقدي صورته  $A$ . وليكن  $\alpha \in \mathbb{R}$

- لنحدد صورة  $\alpha z$ .

$$\alpha z = \alpha \text{aff}(\overline{OA})$$

لدينا

$$= \text{aff}(\alpha \overline{OA})$$

لتكن  $A'$  نقطة بحيث  $\overline{OA'} = \alpha \overline{OA}$

$$\alpha z = \text{aff}(\overline{OA'}) = \text{aff}(A') \quad \text{لدينا}$$

**خاصية:**

إذا كان  $z$  لحق النقطة  $M$  و  $\alpha$  عدد حقيقي فإن  $\alpha z$  هو لحق  $M'$

$$\text{بحيث } \overline{OM'} = \alpha \overline{OM}$$

### (c) تطبيقات:

#### 1- التأويل الهندسي للتطبيق ( $a \in \mathbb{C}$ ) $z \rightarrow z+a$

نعتبر التطبيق:

$$f: P \rightarrow P \\ M(z) \rightarrow M'(z') / z' = z+a$$

نحدد طبيعة  $f$

لتكن  $M(z)$  نقطة من  $P$  و  $M'(z')$  صورتها.

$$z' = z+a$$

لدينا:

$$\text{aff}(\overline{MM'}) = \text{aff}(M') - \text{aff}(M)$$

لدينا:

$$= z+a - z = a$$

لتكن  $\bar{u}$  لاحقها  $a$ .

$$\text{aff}(\overline{MM'}) = \text{aff}(\bar{u})$$

إذن

$$\overline{MM'} = \bar{u}$$

يعني

$$\bar{u}(a)$$

إذن  $f$  إزاحة متجهتها  $\bar{u}(a)$

#### خاصية:

$$f: P \rightarrow P$$

ليكن  $a \in \mathbb{C}$  التطبيق

$$M(z) \rightarrow M'(z') / z' = z+a$$

إزاحة متجهتها  $\bar{u}$  التي لاحقها  $a$

#### 2- لحق منتصف قطعة:

لتكن  $I$  منتصف  $[AB]$  يعني  $I$  مرجع  $\{(A,1)(B,1)\}$

$$\overline{OI} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$$

لدينا:

$$\text{aff}(I) = \text{aff}(\overline{OI}) = \text{aff}\left(\frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})\right)$$

إذن:

$$= \frac{1}{2}(\text{aff}(\overline{OA}) + \text{aff}(\overline{OB}))$$

$$\text{aff}(I) = \frac{1}{2}(\text{aff}(A) + \text{aff}(B))$$

إذن:

#### خاصية:

إذا كان  $I$  منتصف  $[AB]$  فإن:

$$\text{aff}(I) = \frac{1}{2}(\text{aff}(A) + \text{aff}(B))$$

#### ملاحظة:

إذا كان  $G$  مرجع  $\{(B,\beta)(A,\alpha)\}$

$$\text{aff}(G) = \frac{1}{\alpha + \beta}(\alpha \text{aff}(A) + \beta \text{aff}(B))$$

فإن:

#### 3- شرط استقامية ثلاث نقط:

لتكن  $A \neq B$  و  $C$  لاحقها  $z_C, z_B, z_A$  بحيث

$$(\exists \alpha \in \mathbb{R}) : \overline{AC} = \alpha \overline{AB}$$

$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) : \text{aff}(\overline{AC}) = \alpha \text{aff}(\overline{AB})$$

$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) : z_C - z_A = \alpha(z_B - z_A)$$

$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) : \alpha = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

### خاصية:

لتكن  $A \neq B$  و  $C$  و  $3$  نقط لاحقها  $z_C, z_B, z_A$  بحيث  $A \neq B$  تكون النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  مستقيمة إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

### تمرين تطبيقي:

نعتبر النقط  $M'(iz), M(z), A(i)$  حيث  $z \in \mathbb{C}$

حدد مجموعة النقط  $M$  التي تكون من أجلها  $A$  و  $M$  و  $M'$  مستقيمة.

### V- الشكل المثلي لعدد عقدي غير منعدم:

#### 1) عمدة عدد عقدي غير منعدم

#### تعريف:

ليكن  $z \in \mathbb{C}^*$  و  $M$  صورة العدد  $z$ . كل قياس للزاوية الموجهة  $(\bar{e}_1, \overline{OM})$  يسمى عمدة للعدد  $z$ .

#### ملاحظة:

إذا كان  $\alpha$  قياسا للزاوية  $(\bar{e}_1, \overline{OM})$  فإن كل عدد على شكل

$$\alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

هو قياس ل  $(\bar{e}_1, \overline{OM})$ . إذن: إذا كان  $\alpha$  عمدة ل  $z$  فإن كل عدد على شكل:  $\alpha + 2k\pi$  هو عمدة ل  $z$

$$\text{نكتب: } \arg(z) = \alpha + 2k\pi \quad \text{أو} \quad \arg(z) = \alpha[2\pi]$$

#### أمثلة:

حدد عمدة لكل من الأعداد:  $1+3i; 1-i; 1+i; -2i; 3i; -3; 2$  لتكن  $A, B, C, D, E, F, G$  صور لهذه الأعداد على التوالي: لدينا:

$$*\arg(2) \equiv (\bar{e}_1, \overline{OA})[2\pi] \equiv 0[2\pi]$$

$$*\arg(-3) \equiv (\bar{e}_1, \overline{OB})[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$$

$$*\arg(3i) \equiv (\bar{e}_1, \overline{OC})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$*\arg(-2i) \equiv (\bar{e}_1, \overline{OD})[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$*\arg(1+i) \equiv (\bar{e}_1, \overline{OE})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$*\arg(1-i) \equiv (\bar{e}_1, \overline{OF})[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$*\arg(1+3i) \equiv (\bar{e}_1, \overline{OG})[2\pi] \equiv \alpha[2\pi]$$

حيث  $\tan \alpha = 3$

## ملاحظة:

$$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi] \quad (*)$$

$$z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi[2\pi] \quad (*)$$

$$z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \quad (*)$$

$$z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \quad (*)$$

$$z \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z) \equiv k\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad (*)$$

$$z \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (*)$$

## (2) الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

### تعريف:

ليكن  $z \in \mathbb{C}$ . لتكن  $\theta$  عمدته و  $r$  معياره:  $|z| = r$

$$\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$$

لتكن  $M$  صورة  $z$ .

$$\text{لدينا } OM = |\text{aff}(M)| = |z| = r$$

لدينا أحداثيات  $M$ :

$$M(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\text{إذن } \text{aff}(M) = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

$$\text{إذن } \text{aff}(M) = z$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{إذن}$$

### خاصية وتعريف:

كل عدد عقدي غير منعدم  $z$  يكتب بطريقة وحيدة على

شكل  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  حيث  $|z| = r$  و  $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$

وهذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد  $z$ . ونكتب  $z = [r, \theta]$

### ملاحظة:

$z = 0$  ليست له لا عمدة ولا شكل مثلثي.

$z = [r, \theta]$  إذا كان  $M$  صورة  $z$  فإن  $(r, \theta)$  يسمى زوج

الأحداثيات القطبية ل  $M$ .

$$[r, \theta] = [r', \theta'] \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta'[2\pi] \end{cases} \quad (*)$$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z')[2\pi] \end{cases} \quad \text{يعني:}$$

$z = a + ib$  ليكن  $z \in \mathbb{C}^*$  للحصول على ش المثلثي ل  $z$  نتبع ما يلي

$$z = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = 1 \quad \text{ولدينا}$$

$$\text{إذن يوجد } \alpha \text{ بحيث: } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ و } \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{إذن: } z = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

### خاصية:

$z = a + ib$  من  $\mathbb{C}^*$  الشكل المثلثي ل  $z$  هو  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

$$\text{حيث } r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ و } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ و } \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## تمارين تطبيقية

### تمرين 1

حدد الشكل المثلثي للأعداد التالية:

$$(*) \quad z = 5 \quad \text{لدينا } |z| = 5 \quad \arg(z) \equiv 0[2\pi]$$

$$\text{إذن } z = [5, 0]$$

$$(*) \quad z = -3$$

$$\text{إذن } \arg(z) \equiv \pi[2\pi], |z| = 3 \quad z = [3, \pi]$$

$$(*) \quad z = 2i$$

$$\text{إذن } \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi], |z| = 2 \quad z = \left[2, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(*) \quad z = -3i$$

$$\text{إذن } \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi], |z| = 3 \quad z = \left[3, -\frac{\pi}{2}\right]$$

$$(*) \quad z = 1 + i\sqrt{3}$$

$$|z| = 2$$

$$z = 1 + i\sqrt{3}$$

$$= 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$|z| = 2 \quad ; \quad z = \sqrt{3} - i \quad (*)$$

$$z = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) \quad \text{لدينا:}$$

$$= 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 2 \left( \cos -\frac{\pi}{6} + i \sin -\frac{\pi}{6} \right)$$

$$z = \left[2, -\frac{\pi}{6}\right]$$

$$z = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i \quad (*)$$

$$z = 2\sqrt{2} \left( \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}i \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2\sqrt{2} \left( -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$$z = \left[2\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$$



$$|z| = \left| 2 \cos \frac{\alpha}{2} \right| \quad \text{لدينا}$$

- لندرس إشارة  $\cos \frac{\alpha}{2}$  في  $[0, 2\pi]$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \pi + 2k\pi$$

ولدينا  $\alpha \in [0, 2\pi]$  إذن:  $\alpha = \pi$

- إذا كان  $\alpha \in [0, \pi[$  فإن  $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$  إذن  $|z| = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$

$$z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{إذن}$$

$$z = \left[ 2 \cos \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right] \quad \text{ومنه}$$

$$|z| = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{و} \quad \arg(z) \equiv \frac{\alpha}{2} [2\pi]$$

- إذا كان  $\alpha \in ]\pi, 2\pi]$  فإن  $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$  إذن  $|z| = -2 \cos \frac{\alpha}{2}$

$$z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$= -2 \cos \frac{\alpha}{2} \left( -\cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$= -2 \cos \frac{\alpha}{2} \left( \cos \left( \pi + \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\alpha}{2} \right) \right)$$

$$z = \left[ -2 \cos \frac{\alpha}{2}, \pi + \frac{\alpha}{2} \right]$$

$$\text{إذن } |z| = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{و} \quad \arg(z) \equiv \left( \pi + \frac{\alpha}{2} \right) [2\pi]$$

- إذا كان  $\alpha = \pi$  فإن  $|z| = 0$  يعني  $z = 0$

إذن  $z$  ليس له عمدة.

### 3) عمدة العدد $z$

$$z = [r, \theta] \quad \text{ليكن}$$

$$\bar{z} = \overline{[r, \theta]} = \overline{r(\cos \theta + i \sin \theta)} \quad \text{* لدينا:}$$

$$= r(\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$= r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

$$\bar{z} = [r, -\theta] \quad \text{إذن}$$

$$\arg(\bar{z}) = -\theta [2\pi]$$

$$= -\arg(z) [2\pi]$$

\* ولدينا:  $-z = -r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$= r(-\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$= r(\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta))$$

$$-z = [r, \pi + \theta]$$

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$$

### خاصية:

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]; \quad \overline{[r, \theta]} = [r, -\theta] \quad (*)$$

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]; \quad -[r, \theta] = [r, \pi + \theta] \quad (*)$$

$$|z| = 2\sqrt{2} \quad z = -\sqrt{6} - i\sqrt{2} \quad (*)$$

$$z = 2\sqrt{2} \left( \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} - i \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left( \frac{-\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left( -\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$z = \left[ 2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{6} \right]$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

إذن:  $z = \sin \alpha + i \cos \alpha \quad (*)$

لدينا  $|z| = 1$

$$z = \sin \alpha + i \cos \alpha$$

$$= \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$z = \left[ 1, \frac{\pi}{2} - \alpha \right]$$

$$|z| = 1$$

لدينا  $z = -\sin \alpha - i \cos \alpha \quad (*)$

$$z = -\sin \alpha - i \cos \alpha$$

$$= -\cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$= \cos \left( \pi + \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$= \cos \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$z = \left[ 1, \frac{3\pi}{2} - \alpha \right]$$

إذن:

$z = a(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (*)$  مع  $\alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$

لدينا  $|z| = |a|$

إذا كان  $a > 0$  فإن  $|z| = a$

ولدينا  $z = a(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

إذن  $z = [a, \alpha]$

إذا كان  $a < 0$  فإن  $|z| = -a$

$$z = a(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$= -a(-\cos \alpha - i \sin \alpha)$$

$$= -a(\cos(\pi + \alpha) + i \sin(\pi + \alpha))$$

$$z = [-a, \pi + \alpha]$$

إذن:

### ملاحظة:

إذا كان  $z = a(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  مع  $a > 0$  فإن  $z = [a, \alpha]$

### تمرين 2

مع  $\alpha \in [0, 2\pi]$   $z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$

حدد معيار وعمدة  $z$

$$z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z}{z'}\right) &\equiv \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]\end{aligned}$$

**خاصية:**

$$\begin{aligned}\frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} &= \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right] \\ \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &\equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]\end{aligned}$$

**تمارين تطبيقية:**

**تمرين 1**

حدد الشكل المثلثي ل  $z$  في الحالات التالية:

$$z = 2i \frac{(1-i)^4 (\sqrt{3}+i)}{5(\sqrt{3}-3i)^2}$$

$$* 2i = \left[2, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{لدينا:}$$

$$\begin{aligned}1-i &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos -\frac{\pi}{4} + i \sin -\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$$* 1-i = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\begin{aligned}\sqrt{3}+i &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

$$* \sqrt{3}+i = \left[2, \frac{\pi}{6}\right]$$

$$* 5 = [5, 0]$$

$$* \sqrt{3}-3i = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3} \left(\cos -\frac{\pi}{3} + i \sin -\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt{3}-3i = \left[2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}\right]$$

إذن:

$$\begin{aligned}z &= \frac{\left[2, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]^4 \times \left[2, \frac{\pi}{6}\right]}{[5, 0] \times \left[2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}\right]^2} = \frac{\left[2, \frac{\pi}{2}\right] \times [4, -\pi] \times \left[2, \frac{\pi}{6}\right]}{[5, 0] \times \left[12, -2\frac{\pi}{3}\right]} \\ &= \frac{\left[16, -\frac{\pi}{3}\right]}{\left[60, -2\frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{16}{60}, \frac{\pi}{3}\right]\end{aligned}$$

**تمرين 2**

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \quad z_2 = 1+i, \quad z_1 = 1+i\sqrt{3} \quad \text{ليكن}$$

- حدد الشكل المثلثي لكل من  $z_1$  و  $z_2$

#### 4 العدة والعمليات في C

**(a) الجداء:**

$$z' = [r', \theta'] \quad \text{و} \quad z = [r, \theta] \quad \text{ليكن}$$

$$\begin{aligned}zz' &= r(\cos \theta + i \sin \theta) r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= rr'[(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')] \\ &= rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))\end{aligned}$$

$$zz' = [rr', \theta + \theta'] \quad \text{إذن}$$

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$$

**خاصية:**

$$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta'] \quad (*)$$

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi] \quad (*)$$

**ملاحظة:**

$$\prod_{i=1}^n [r_i, \theta_i] = \left[\prod_{i=1}^n r_i, \sum_{i=1}^n \theta_i\right] \quad (*)$$

$$\arg\left(\prod_{i=1}^n z_i\right) = \sum_{i=1}^n \arg(z_i)[2\pi] \quad (*)$$

$$(n \in \mathbb{N}) \quad [r, \theta]^n = [r^n, n\theta] \quad (*)$$

$$(n \in \mathbb{N}) \quad \arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi] \quad (*)$$

**(b) المقلوب:** ليكن  $z = [r, \theta]$

$$\frac{1}{[r, \theta]} = \frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{1}{r} \left(\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{1}\right)$$

$$= \frac{1}{r} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right] = \frac{1}{z}$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$$

**خاصية:**

$$\frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right] \quad (*)$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi] \quad (*)$$

**(n \in \mathbb{N}): ملاحظة:**

$$[r, \theta]^{-n} = \frac{1}{[r, \theta]^n} = \frac{1}{[r^n, n\theta]} = \left[\frac{1}{r^n}, -n\theta\right]$$

$$[r, \theta]^{-n} = [r^{-n}, -n\theta] \quad \text{إذن}$$

$$\arg(z^{-n}) \equiv -n \arg(z)[2\pi]$$

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad [r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$$

$$\arg(z^n) \equiv n \arg(z)[2\pi]$$

إذن:

**(c) الخارج:**

$$\frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = [r, \theta] \times \frac{1}{[r', \theta']}$$

$$= [r, \theta] \cdot \left[\frac{1}{r'}, -\theta'\right] = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$$

لدينا:

$$\begin{aligned}(\bar{u}, \bar{v}) &\equiv (\overline{OA}, \overline{OB})[2\pi] \\ &\equiv (\overline{OA}, \bar{e}_1) + (\bar{e}_1, \overline{OB})[2\pi] \\ &\equiv (\bar{e}_1, \overline{OB}) - (\bar{e}_1, \overline{OA})[2\pi] \\ &\equiv \arg(\text{aff}(B)) - \arg(\text{aff}(A))[2\pi] \\ &\equiv \arg(z_{\bar{v}}) - \arg(z_{\bar{u}})[2\pi] \\ &\equiv \arg(\text{aff}(\bar{v})) - \arg(\text{aff}(\bar{u}))[2\pi]\end{aligned}$$

**خاصية:**

$$(\bar{u}, \bar{v}) \equiv \arg(\text{aff}(\bar{v})) - \arg(\text{aff}(\bar{u}))[2\pi]$$

**حالات خاصة:**

$$(\bar{e}_1, \overline{AB}) \equiv \arg(\text{aff}(\overline{AB})) - \arg(1)[2\pi] \quad (*)$$

$$\equiv \arg(\text{aff}(B) - \text{aff}(A))$$

$$\equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$

$$(\bar{e}_1, \overline{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$

$$(\overline{AB}, \overline{CD}) \equiv \arg(\text{aff}(\overline{CD})) - \arg(\text{aff}(\overline{AB}))[2\pi] \quad (*)$$

$$\equiv \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$

$$(\overline{AB}, \overline{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

**تمارين تطبيقي:**

**تمرين 1**

نعتبر النقط  $A(i), B(z_1), C(z_2)$  حيث  $z_1$  و  $z_2$  من  $\mathbb{C}$  يحققان:

$$z_2 = iz_1 + i + 1$$

بين أن المثلث  $ABC$  قائم الزاوية ومتساوي الساقين في  $A$ .

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi] \quad \text{لدينا:}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{iz_1 + i + 1 - i}{z_1 - i} \\ &= \frac{iz_1 + 1}{z_1 - i} \\ &= \frac{i(z_1 - i)}{z_1 - i} = i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

ومنه:

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \arg(i)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \quad \text{وبالتالي:}$$

إذن  $ABC$  قائم الزاوية ومتساوي الساقين في  $A$ .

**تمرين 2**

حدد وانشئ المجموعة

$$E = \left\{ M(z) / \arg(z - i) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \right\}$$

- استنتج  $\cos \frac{\pi}{12}$  و  $\sin \frac{\pi}{12}$

لدينا

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_1 = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\left[2, \frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]} = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{12}\right]$$

(\*) لدينا:  $z = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{12}\right]$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right) \quad (1)$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{2}$$

ولدينا

$$= \frac{1 - i + i\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) = z \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن:

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{4\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{أي}$$

**ملاحظة:**  $[r, \alpha] = [r, \alpha + 2k\pi]$

**تمرين**

$$z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{نعتبر العدد}$$

(1) أحسب  $z^{2000}$

(2) حدد قيم العدد النسبي  $n$  التي يكون من أجلها  $z^n \in \mathbb{R}$

(3) حدد حسب قيم العدد الطبيعي  $n$   $z^n$ .

**(5) زاوية متجهتين:**

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين غير منعدمتين لحقاهما على التوالي  $z_{\bar{u}}$  و  $z_{\bar{v}}$

لتكن  $A$  و  $B$  النقطتين بحيث  $\vec{OA} = \vec{u}$  و  $\vec{OB} = \vec{v}$

$$\text{aff}(A) = \text{aff}(\overline{OA}) = \text{aff}(\bar{u}) = z_{\bar{u}}$$

$$\text{aff}(B) = \text{aff}(\overline{OB}) = \text{aff}(\bar{v}) = z_{\bar{v}}$$

## 6 صيغة موثر وتطبيقاتها:

ليكن  $\theta \in \mathbb{R}$  و  $n \in \mathbb{Z}$   $[1, \theta]^n = [1, n\theta]$

يعني:  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

**خاصية:**

$$(\forall \theta \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z})$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

**تطبيقات:**

حساب  $\cos(nx)$  و  $\sin(nx)$  بدلالة  $\cos x$  و  $\sin x$

- لدينا:  $(\cos nx + i \sin nx) = (\cos x + i \sin x)^n$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos x)^k \cdot (i \sin x)^{n-k}$$

ومنه:

$$\cos(nx) = \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos x)^k \cdot (i \sin x)^{n-k} \right]$$

$$\sin(nx) = \operatorname{Im} \left[ \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos x)^k \cdot (i \sin x)^{n-k} \right]$$

**مثال:**

احسب  $\cos 5x$  و  $\sin 5x$  بدلالة  $\cos x$  و  $\sin x$

$$\begin{aligned} \cos 5x + i \sin 5x &= (\cos x + i \sin x)^5 \\ &= \cos^5 x + 5 \cos^4 x (i \sin x) + 10 \cos^3 x (i \sin x)^2 \\ &\quad + 10 \cos^2 x (i \sin x)^3 + 5 \cos x (i \sin x)^4 + (i \sin x)^5 \\ &= \cos^5 x + 5 \cos^4 x (i \sin x) - 10 \cos^3 x \sin^2 x \\ &\quad - 10i \cos^2 x \sin^3 x + 5 \cos x \sin^4 x + i \sin^5 x \\ &= (\cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x) \\ &\quad + i(5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x) \end{aligned}$$

ومنه:

$$\cos 5x = (\cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x)$$

$$\sin 5x = (5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x)$$

## 7 الترميز الأسّي لعدد عقدي:

**(a) الترميز:**

نرمز للعدد  $[1, \theta]$  بالرمز:  $e^{i\theta}$

$$e^{i\theta} = [1, \theta] = \cos \theta + i \sin \theta$$

**ملاحظة:**

$$[r, \theta] = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$$

$$[r, \theta] = r e^{i\theta}$$

**أمثلة:**

$$*) e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$*) e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$*) e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$*) \sqrt{3} + i = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$$

## (b) خاصيات:

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad (*)$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \quad (*)$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad (*)$$

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad (*)$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{-i\theta} \quad (*)$$

$$-e^{i\theta} = e^{i\pi} \cdot e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)} \quad (*)$$

## (8) صيغتا أولير Euler:

$$(1) e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{ليكن } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x)$$

$$(2) e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

من (1) + (2) نستنتج أن:

$$2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{إذن}$$

ومن (1) - (2) نستنتج أن:

$$2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad \text{إذن}$$

**خاصية:**

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

**ملاحظة:**

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

**تطبيق:** اخطاط حدودية مثلثية:

يعني كتابتها بدلالة  $\cos x$  و  $\sin x$ .

**تمرين:**

$$P(x) = \cos^3 x \sin^3 x \quad \text{اخطاط الحدودية:}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{cases} \quad \text{نعلم أن}$$

إذن:

## VI- الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم:

### (1) تعريف:

ليكن  $z$  من  $\mathbb{C}$  و  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$   
 نسمي الجذر النوني أو الجذر من الرتبة  $n$  للعدد  $z$  كل عدد عقدي  $z$  يحقق  $z^n = Z$

### أمثلة:

$$(i)^2 = 1, \quad i^2 = -1 \quad (*)$$

كل من  $i$  و  $-i$  جذر من الرتبة 2 للعدد 1.

$$(-i)^4 = 1, \quad i^4 = 1, \quad (-1)^4 = 1, \quad 1^4 = 1 \quad (*)$$

الأعداد  $-i, i, -1, 1$  جذور من الرتبة 4 للعدد 1.

### (2) تحديد الجذور من الرتبة $n$ .

ليكن:  $z = re^{i\theta}$  مع  $r > 0$

نضع  $z = ee^{iq}$  مع  $q > 0$

$$z^n = Z \Leftrightarrow e^n e^{in\ell} = re^{i\theta} \quad \text{لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^n = r \\ n\ell \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e = \sqrt[n]{r} \\ \ell \equiv \frac{\theta}{n} \left[ \frac{2\pi}{n} \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell = \sqrt[n]{r} \\ \ell = \frac{\theta}{n} + \frac{2k}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ell = \sqrt[n]{r} \\ \ell \equiv \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} [2\pi] / k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} / k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$$

إذن هناك  $n$  جذر نوني.

### خاصية:

ليكن  $Z = re^{i\theta}$  (مع  $r > 0$ ) و  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$   
 العدد  $Z$  يقبل  $n$  جذر نوني. وهذه الجذور النونية هي الأعداد:

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} / k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$$

### مثال:

لنحدد الجذور من الرتبة 3 للعدد  $Z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

- لنحدد الشكل المتلقي ل  $Z$

$$Z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \quad \text{لدينا:}$$

$$= 2 \left( \frac{-\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 2 \left( \cos \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$Z = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \text{إذن:}$$

إذن الجذور من الرتبة 3 ل  $Z$  هي الأعداد:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{8} (e^{ix} + e^{-ix})^3 \times \left( \frac{-1}{4} (e^{ix} + e^{-ix})^2 \right) \\ &= \frac{-1}{32} (e^{ix} + e^{-ix}) (e^{ix} + e^{-ix})^2 (e^{ix} + e^{-ix})^2 \\ &= \frac{-1}{32} (e^{ix} + e^{-ix}) (e^{2ix} + e^{-2ix})^2 \\ &= \frac{-1}{32} (e^{ix} + e^{-ix}) (e^{4ix} + e^{-4ix} - 2) \\ &= \frac{-1}{32} (e^{i5x} + e^{-3ix} - 2e^{ix} + e^{3ix} + e^{-5ix} - 2e^{-ix}) \\ &= \frac{-1}{32} [(e^{i5x} + e^{-i5x}) + (e^{3ix} + e^{-3ix}) - 2(e^{ix} + e^{-ix})] \\ &= \frac{-1}{32} (2\cos(5x) + 2\cos(3x) - 4\cos(x)) \end{aligned}$$

$$P(x) = \frac{-1}{16} (\cos(5x) + \cos(3x) - 2\cos(x)) \quad \text{إذن}$$

**ملاحظة:** طريقة البحث عن الشكل المتلقي لمجموع عددين لعقديين لهما نفس المعيار:

### طريقة 1

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} + e^{i\beta} &= (\cos \alpha + \cos \beta) + i(\sin \alpha + \sin \beta) \\ &= 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + i 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &= 2 \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \left[ \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} - e^{i\beta} &= (\cos \alpha - \cos \beta) + i(\sin \alpha - \sin \beta) \\ &= -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + i 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &= 2 \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \left[ -\sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + i \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

### طريقة 2

$$\begin{aligned} *) e^{i\alpha} + e^{i\beta} &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left( e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right) \\ &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \times 2 \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \\ &= 2 \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \left( \cos \frac{\alpha+\beta}{2} + i \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \\ *) e^{i\alpha} - e^{i\beta} &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left( e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right) \\ &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \times 2i \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \\ &= 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \\ &= 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot e^{i\left(\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}\right)} \\ &= 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \left( \cos \frac{\alpha+\beta+\pi}{2} + i \sin \frac{\alpha+\beta+\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$w_0 = e^{i0} = 1$$

$$w_1 = e^{i\pi} = -1$$

(2) الجذور من الرتبة 3 للوحدة هي الأعداد:

$$w_k = e^{\frac{i2k\pi}{3}} / k \in \{0,1,2\}$$

هذه الجذور هي:

$$w_0 = e^{i0} = 1$$

$$w_1 = e^{\frac{i2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$= \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$w_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = j \quad j = e^{\frac{i2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = e^{\frac{i4\pi}{3}} = \cos \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

الجذور المكعبة ل 1 هي  $\bar{j}, j, 1$

إن

$$\begin{aligned} j^2 = \bar{j} & \quad ; \quad j^3 = 1 \quad (*) \\ 1 + j + j^2 = 0 & \quad \text{إن} \quad 1 + j + \bar{j} = 0 \quad (*) \\ j^2 = -1 - j & \quad (*) \end{aligned}$$

(3) الجذور من الرتبة 4 ل 1:

$$w_k = e^{\frac{i2k\pi}{4}} = e^{\frac{ik\pi}{2}} / k \in \{0,1,2,3\}$$

هذه الجذور هي:

$$w_0 = e^{i0} = 1$$

$$w_1 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$$

$$w_2 = e^{i\pi} = -1$$

$$w_3 = e^{\frac{i3\pi}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$$

الجذور من الرتبة 4 ل 1 هي:  $-i, i, -1, 1$

(b) خاصيات:

-1 لتكن  $w_k$  الجذور من الرتبة  $n$  ل 1:

$$w_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$$

لدينا:

$$= \left( e^{\frac{i2\pi}{n}} \right)^k = w_1^k$$

خاصية

لتكن  $w_k$  الجذور النونية لـ 1:

$$w_1 = e^{\frac{i2\pi}{n}} \quad \text{مع} \quad \forall k \in \{0,1,\dots,(n-1)\} \quad w_k = w_1^k$$

إن الجذور من الرتبة  $n$  لـ 1 هي:  $1, w_1, w_1^2, w_1^3, \dots, w_1^{n-1}$

$$z_k = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{i5\pi + 2k\pi}{3}} \quad k \in \{0,1,2\}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{i5\pi}{12}}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{i3\pi}{12}}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{i21\pi}{12}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{i7\pi}{4}}$$

$$= \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt[3]{2} \left( \cos \left( 2\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( 2\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

(3) صور الجذور النونية:

ليكن  $Z = re^{i\theta}$  ( $r > 0$ )

الجذور النونية ل  $Z$  هي الأعداد

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i\theta + 2k\pi}{n}} / k \in \{0,1,2,\dots,(n-1)\}$$

لتكن  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$  صور  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  على التوالي

$$OM_k = |aff(M_k)| = |z_k| = \sqrt[n]{r}$$

إن النقاط  $M_k$  تنتمي إلى الدائرة التي مركزها  $o$  وشعاعها  $\sqrt[n]{r}$  ولدينا:

$$\left( \overline{OM_k}, \overline{OM_{k+1}} \right) \equiv \arg(z_{k+1}) - \arg(z_k) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\theta}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{\theta}{n} - \frac{2k\pi}{n} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{2\pi}{n} [2\pi]$$

إن الزاوية  $\left( \overline{OM_k}, \overline{OM_{k+1}} \right)$  ثابتة.

إن النقاط  $M_k$  تكون مضلعاً منتظماً.

خاصية:

ليكن  $Z = re^{i\theta}$  ( $r > 0$ )

صور الجذور النونية للعدد  $Z$  تكون مضلعاً منتظماً ذو  $n$  ضلع محاط بالدائرة التي مركزها  $o$  وشعاعها  $\sqrt[n]{r}$ .

(4) الجذور من الرتبة  $n$  للوحدة: **unité**

(a) تحديد الجذور من الرتبة  $n$  للوحدة

ليكن  $z = 1$

لدينا  $z = e^{i0}$

إن الجذور من الرتبة  $n$  ل 1 هي الأعداد:

$$w_k = \sqrt[n]{1} e^{\frac{i0 + 2k\pi}{n}}$$

$$w_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}} / k \in \{0,1,\dots,(n-1)\}$$

خاصية:

الجذور من الرتبة  $n$  للعدد 1 (لوحدة) هي الأعداد:

$$w_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}} / k \in \{0,1,\dots,(n-1)\}$$

أمثلة:

(1) الجذور المربعة للعدد 1 هي الأعداد:

$$w_k = e^{\frac{i2k\pi}{2}} = e^{ik\pi} / k \in \{0,1\}$$

هذان الجذران هما:

$$z_0 = 1(1+2i) = 1+2i$$

$$z_1 = j(1+2i) = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+2i)$$

$$z_2 = \bar{j}(1+2i)$$

### (5) الجذور المربعة لعدد من $\mathbb{C}^*$

#### (a) الطريقة المثلثية:

$$\text{ليكن } Z = re^{i\theta} \quad (r>0)$$

لنحدد الجذرين المربعين لـ  $Z$ .

$$z^2 = Z \Leftrightarrow z^2 = re^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z^2 = (\sqrt{r})^2 \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \\ z = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

إذن الجذران المربعان لـ  $Z$  هما:  $\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$  و  $-\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$

#### (b) الطريقة الجبرية:

##### (1) إذا كان $Z = a \in \mathbb{R}_+^*$

$$Z = a = (\sqrt{a})^2 \quad \text{لدينا:}$$

إذن  $\sqrt{a}$  و  $-\sqrt{a}$  هما الجذران المربعان للعدد  $Z$ :

##### (2) إذا كان $Z = -a (a \in \mathbb{R}_+^*)$

$$Z = -a = i^2 (\sqrt{a})^2 = (i\sqrt{a})^2$$

إذن جذرا  $Z$  هما:  $i\sqrt{a}$  و  $-i\sqrt{a}$

##### (3) إذا كان $Z = ib (b \in \mathbb{R}_+^*)$

$$Z = ib = 2i \cdot \frac{b}{2} = (1+i)^2 \left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$

$$= \left((1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$

إذن جذرا  $Z$  هما  $(1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}$  و  $-z$

##### (4) إذا كان $Z = -ib (b \in \mathbb{R}_+^*)$

$$Z = -ib = -2i \cdot \frac{b}{2} = \left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 (1-i)^2$$

$$= \left((1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$

إذن جذرا  $Z$  هما  $(1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}$  و  $-z$

-2- لتكن  $w_k$  الجذور النونية لـ 1:

$$w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1} = 1 + w_1 + w_1^2 + \dots + w_1^{n-1} \\ = \frac{(1-w_1)(1+w_1+w_1^2+\dots+w_1^{n-1})}{(1-w_1)}$$

$$= \frac{1-w_1^n}{1-w_1} = \frac{1-1}{1-w_1} = 0$$

(  $w_1, w_1^n = 1$  جذر نوني لـ 1 )

#### خاصية

مجموع الجذور النونية للعدد 1 منعدم.

#### ملاحظة:

(\* إذا كان  $w$  جذر نوني للعدد 1 فإن كل من  $w$  و  $w^{-1}$  جذر نوني للعدد 1.

(\* إذا كان  $w$  و  $w'$  جذرين نونيين للعدد 1 فإن كل من  $ww'$  و  $\frac{w}{w'}$  جذر نوني للعدد 1.

### (c) العلاقة بين الجذور النونية لـ 1 والجذور النونية

#### لعدد من $\mathbb{C}^*$

ليكن  $Z$  من  $\mathbb{C}^*$

نفترض أن  $a \neq 0$  جذر نوني لـ  $Z$  ( $a^n = Z$ )

- لتحديد الجذور الأخرى:

$$z^n = Z \Leftrightarrow z^n = a^n$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{a}\right)^n = 1$$

هذا يعني أن  $\frac{z}{a}$  جذر نوني لـ 1

يعني:  $\frac{z}{a} = w_k / k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$

يعني:  $z = aw_k / k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$

#### خاصية:

ليكن  $Z$  من  $\mathbb{C}^*$  و  $a$  جذر نوني لـ  $Z$  نحصل على الجذور النونية لـ  $Z$  بضرب  $a$  في الجذور النونية للوحدة 1.

#### مثال:

أحسب  $(1+2i)^3$  واستنتج الجذور من الرتبة 3 للعدد  $Z = -1+2i$  لدينا:

$$(1+2i)^3 = (1+2i)^2 (1+2i) \\ = (1+4i-4)(1+2i) = 1+2i+4i-8-4-8i \\ = -11-2i$$

- لدينا  $(1+2i)^3 = Z$

إذن  $1+2i$  جذر من الرتبة 3 لـ  $Z$

ونعلم أن الجذور من الرتبة 3 لـ 1 هي:  $1, j, \bar{j}$

- إذن الجذور من الرتبة 3 لـ  $Z$  هي:

### خاصية:

نعتبر المعادلة  $az^2 + bz + c = 0$  مع  $a \neq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{نضع}$$

1- إذا كان  $\Delta = 0$  فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا:  $z = -\frac{b}{2a}$ .

2- إذا كان  $\Delta \neq 0$  فإن  $\Delta$  يقبل جذرين مربعين  $u$  و  $-u$

$$. z = \frac{-b-u}{2a} \quad \text{و} \quad z = \frac{-b+u}{2a}$$

### ملاحظات:

(\* نعتبر المعادلة  $az^2 + bz + c = 0$  مع  $a \neq 0$

إذا كان  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة فإن:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

(\* نعتبر المعادلة  $az^2 + 2b'z + c = 0$  مع  $a \neq 0$

من أجل حل المعادلة نستعمل المميز المختصر

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

1- إذا كان  $\Delta' = 0$  المعادلة لها حل وحيد  $z = -\frac{b'}{a}$

2- إذا كان  $\Delta' \neq 0$  المعادلة لها حلان:

$$. z_2 = \frac{-b'-u}{2a} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-b'+u}{2a} \quad \text{حيث } u \text{ جذر مربع } \Delta'.$$

### تمرين تطبيقي:

حل في  $\mathbb{C}$  المعادلات التالية:

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = i^2 3 = (i\sqrt{3})^2$$

إذن جذرا  $\Delta$  هما  $\sqrt{3}$  و  $-\sqrt{3}$

$$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = j$$

إذن:

$$z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$$

إذن:  $S = \{j, \bar{j}\}$

$$(2+i)z^2 - (3+2i)z + 1 - \frac{i}{2} = 0 \quad (2)$$

$$\Delta = (3+2i) - 4(2+i)\left(1 - \frac{i}{2}\right)$$

$$= -5 + 12i$$

$$= 2^2 + (3i)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i$$

$$= (2+3i)^2$$

إذن جذرا  $\Delta$  هما  $2+i$  و  $-u$

إذن:

$$z_2 = \frac{(3+2i) + (2+3i)}{2(2+i)} ; \quad z_1 = \frac{(3+2i) - (2+3i)}{2(2+i)}$$

$$= \frac{5+5i}{2(2+i)} = \frac{(5+5i)(2-i)}{10} ; \quad = \frac{1-i}{2(2+i)} = \frac{(1-i)(2-i)}{10}$$

$$z_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i ; \quad z_1 = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$$

إذن:  $S = \{z_1, z_2\}$

(5) إذا كان  $Z = a + ib$  مع  $(a \neq 0 \text{ و } b \neq 0)$

### مثال:

لنحدد الجذرين المربعين للعدد:

$$Z = -3 + 4i$$

نضع  $z = x + iy$  (مع  $x, y \in \mathbb{R}$ )

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{و} \quad x^2 - y^2 - ixy + 2$$

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \\ 2xy = 4 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

من (1) + (3) نستنتج أن  $2x^2 = 2$  يعني  $x = 1$  أو  $x = -1$

ومن (1) - (3) نستنتج أن  $2y^2 = 8$

$$y^2 = 4 \quad \text{يعني}$$

$$y = 2 \quad \text{أو} \quad y = -2$$

ومن خلال (2) لدينا  $xy = 2 > 0$  إذن  $x$  و  $y$  لهما نفس الإشارة

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

إذن

إذن جذرا  $Z$  هما:

$$-z \quad \text{و} \quad z = 1 + 2i$$

### (VII) المعادلات من الدرجة II:

نعتبر المعادلة  $az^2 + bz + c = 0$  مع  $a \neq 0$

$$(E): az^2 + bz + c = 0 \quad \text{لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow a \left( z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

نضع

$$(E) \Leftrightarrow \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

(\* إذا كان  $\Delta = 0$  فإن:

$$(E) \Leftrightarrow \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a}$$

$$S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$$

إذن:

(\* إذا كان  $\Delta \neq 0$  فإن  $\Delta$  يقبل جذرين مربعين  $u$  و  $-u$

إذن:

$$(E) \Leftrightarrow \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{u^2}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( z + \frac{b}{2a} + \frac{u}{2a} \right) \left( z + \frac{b}{2a} - \frac{u}{2a} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b-u}{2a} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-b+u}{2a}$$



## (VIII) الدوران في المستوى:

### (1) التمثيل العقدي للدوران:

ليكن  $R$  دوران مركزه  $\Omega(g)$  وزاويته  $\theta$   
 لتكن  $(M \neq \Omega)$  و  $M'(z')$  بحيث  $M \neq \Omega$

$$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left( \overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'} \right) \equiv \theta [2\pi] \\ |z-w| = |z'-w'| \\ \arg \left( \frac{z'-w}{z-w} \right) \equiv \theta [2\pi] \\ \left| \frac{|z-w|}{|z'-w'|} \right| = 1 \\ \arg(\ ) \equiv \theta [2\pi] \\ \frac{z'-w}{z-w} = e^{i\theta} \\ z'-w = e^{i\theta} (z-w) \\ z' = e^{i\theta} (z-w) + w \end{cases}$$

نلاحظ أن هذه العلاقة تبقى صحيحة كذلك بالنسبة ل  $\Omega$ .

### خاصية:

ليكن  $R$  دوران مركزه  $\Omega(w)$  وزاويته  $\theta$   
 لكل  $(M \neq \Omega)$  و  $M'(z')$  من  $P$  لدينا:

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\theta} (z-w) + w$$

الكتابة  $z' = e^{i\theta} (z-w) + w$  تسمى التمثيل العقدي ل  $R$ .

### مثال:

ليكن  $R$  دوران مركزه  $\Omega(1+i)$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$   
 لنحدد صورة  $R(1-i)$   
 لتكن  $M(z)$  و  $M'(z')$  . نعمم أن:

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z + (1+i) \left( 1 - e^{i\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + (1+i)(1-i)$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + 2$$

لتكن  $A'(z')$  صورة  $A(1-i)$   
 لدينا:

$$z' = i(1-i) + 2$$

$$= i + 3$$

إذن  $A'(3+i)$

### (2) التأويل الهندسي للتطبيق

نعبر التطبيق  $f: P \rightarrow P$

$$M(z) \rightarrow M'(z') / z' = az + b$$

(مع  $b$  من  $\mathbb{C}$  و  $|a|=1$  و  $a \neq 1$ )  
 لنبين أن  $f$  دوران:  
 \* لنبحث عن النقطة الصامدة:

لتكن  $M(z)$ :

$$f(M) = M \Leftrightarrow z = az + b$$

$$\Leftrightarrow z(1-a) = b$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{b}{1-a}$$

إذن  $f$  يقبل نقطة صامدة وحيدة هي  $\Omega(w)$  مع  $w = \frac{b}{1-a}$

\* لتكن  $M(z)$  و  $M'(z')$  من  $P$  بحيث  $M \neq \Omega$   
 $f(M) = M' \Leftrightarrow z' = az + b$

ولدينا  $\Omega(w)$  صامدة إذن  $w = aw + b$

$$b = w - aw$$

$$f(M) = M' \Leftrightarrow z' = az + w - aw$$

$$\Leftrightarrow z' - w = a(z - w)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z' - w| = |a(z - w)| \\ \arg(z' - w) \equiv \arg(a(z - w)) [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z' - w| = |a||z - w| \\ \arg(z' - w) \equiv \arg(a) + \arg(z - w) [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z' - w| = |z - w| \\ \arg(z' - w) - \arg(z - w) \equiv \arg(a) [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left( \overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'} \right) \equiv \arg(a) [2\pi] \end{cases}$$

إذن  $f$  دوران مركزه  $\Omega$  وزاويته  $\arg(a)$ .

### خاصية:

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{C}$  بحيث  $a \neq 1$  و  $|a|=1$   
 التطبيق  $f: P \rightarrow P$

$$M(z) \rightarrow M'(z') / z' = az + b$$

دوران مركزه  $\Omega(w)$  بحيث  $w = \frac{b}{1-a}$  وزاويته  $\arg(a)$

### تمرين تطبيقي:

نعبر التطبيق  $f: P \rightarrow P$

$$M(z) \rightarrow M'(z') / z' = \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z + 1$$

حدد طبيعة التطبيق  $f$ .  
 \* لدينا:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1 \\ \left| \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1 \end{cases}$$

إذن  $f$  دوران مركز  $\Omega(w)$  بحيث:

$$w = \frac{1}{\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{أي:} \quad w = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$w = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

وزاویته

$$\arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad \text{این}$$

وبالتالي  $f$  دوران مرکزہ  $\Omega\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  وزاویته  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .