

التمرين الأول :

نعتبر المتتاليتين $(U_n)_{n \geq 1}$ و $(V_n)_{n \geq 1}$ المعرفتين بما يلي : $V_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2}$ و $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$

$$(1) \text{ بين أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ بين أن } (\forall n \geq 1) \sum_{k=1}^{k=n} k^3 \leq n^4$$

$$(3) \text{ أ- بين أن } (\forall t > 0) \quad t - \frac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t$$

$$\text{ب- بين أن } (\forall n \geq 1) : V_n - \frac{1}{6n^2} \leq U_n \leq V_n$$

ج- استنتج أن $(U_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثاني :

ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n \geq 2$. نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = x^n - nx + 1$

(1) أ- أدرس رتبة الدالة f_n و أنجز جدول تغيرات الدالة f_n

ب- بين أن لكل $n \geq 3$ المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلين u_n و v_n حيث $0 < u_n < 1 < v_n$

$$(2) \text{ أ- بين أن } (\forall n \geq 3) \quad f_n\left(\frac{2}{n}\right) < 0$$

ب- استنتج أن $u_n < \frac{2}{n}$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$(3) \text{ أ- بين أن } (\forall a > 0) (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad (1+a)^n \geq 1+na + \frac{n(n-1)}{2} a^2$$

ب- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = 1$ ثم استنتج أن $f_n\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right) > 0$

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي : $f(x) = \frac{1-x}{2(x^2+1)}$

$$(1) \text{ أ- بين أن } f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{2(x^2 + 1)^2} \text{ و بين أن الدالة } f \text{ تناقصية على المجال } \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{ب- بين أن } (\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]) \quad |f'(x)| \leq \frac{7}{8}$$

ج- بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل في المجال $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ حلا وحيدا α

(2) نعتبر المتتالية $(V_n)_n$ المعرفة بما يلي : $V_0 = \frac{1}{4}$ و $V_{n+1} = f(V_n)$ لكل n من \mathbb{N}

$$\text{أ- بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq V_n \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{ب- بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |V_{n+1} - \alpha| \leq \frac{7}{8} |V_n - \alpha|$$

ج- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |V_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{7}{8}\right)^n$ استنتج أن المتتالية $(V_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها