تمرين 1 — $11,5pnt$

الجزء 1 ($4,25$ن)

لتكن U الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $\begin{cases} U(x)=\dfrac{x}{e^x-1} & si\ x\neq 0 \\ U(0)=1 \end{cases}$

$0,5$ ❶ اثبت أن الدالة U متصلة على $\mathbb{R}^+$ و احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}U(x)$.

❷ ليكن x عدد حقيقي موجب قطعا.

$0,5$ أ) باستعمال مكاملة بالاجزاء مرتين أثبت أن : $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}\displaystyle\int_0^1(1-t)^2e^{tx}dt$.

$0,5$ ب) أثبت أن $0\leq\displaystyle\int_0^1(1-t)^2e^{tx}dt\leq\int_0^1 e^{tx}dt$ و استنتج أن $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

$0,25$ ❸ أثبت أن الدالة U قابلة للاشتقاق على يمين 0 و أن $U'_d(0)=-\dfrac{1}{2}$.

$0,5$ ❹ أثبت أنه : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\left(U'(x)=(1-x-e^{-x})\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}\right)$

$0,5$ ❺ أثبت أنه : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\left(e^{-x}\geq 1-x\right)$ و اعط جدول تغيرات الدالة U.

$0,25$ ❻ حل في $\mathbb{R}^{+*}$ المعادلة $U(x)=x$.

❼ نعتبر المتتالية العددية (a_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي : $\begin{cases} a_{n+1}=U(a_n) \\ a_0=0 \end{cases}$

$0,5$ أ) نقبل أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})(U''(x)>0)$ بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\left(|U'(x)|\leq\dfrac{1}{2}\right)$ و أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})(0<U(x)\leq 1)$.

$0,5$ ب) أثبت أنه $(\forall n\in\mathbb{N})\left(|a_{n+1}-\ln 2|\leq\dfrac{1}{2}|a_n-\ln 2|\right)$.

$0,25$ ج) أثبت أن المتتالية (a_n) متقاربة و احسب نهايتها.

الجزء 2 ($5,25$ن)

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=e^x\sqrt{1-e^{2x}} & si\ x\leq 0 \\ f(x)=\ln(U(x)) & si\ x>0 \end{cases}$

ليكن $(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f في المستوى المنسوب الى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\|=2cm$.

$0,5$ ❶ أثبت أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ و أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

$0,75$ ❷ أثبت أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\left(f(x)=\ln x-\ln(1-e^{-x})-x\right)$ و استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+x=+\infty$ و أول هندسيا النتيجة.

$0,5$ ❸ أثبت أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

$0,5$ ❹ أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0. (يمكن استعمال السؤال 3 الجزء 1)

$0,5$ ❺ أثبت أنه لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\begin{cases} f'(x)=e^x\dfrac{(1-2e^{2x})}{\sqrt{1-e^{2x}}} & si\ x<0 \\ f'(x)=\dfrac{U'(x)}{U(x)} & si\ x>0 \end{cases}$

❻ اعط جدول تغيرات الدالة f.	$0,5$
❼ ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = \left]-\infty, -\frac{\ln 2}{2}\right]$.	
أ) أثبت أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يجب تحديده.	$0,25$
ب) حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.	$0,5$
❽ أنشئ المنحنيان $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g^{-1})$ في نفس المعلم. (نأخذ $\frac{\ln 2}{2} \approx 0,35$)	$0,5$
❾ ليكن Δ حيز المستوى المحصور بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين ذو المعادلة $x = -\ln 2$ و $x = -\frac{\ln 2}{2}$.	
أ) احسب التكامل : $\int_{-\ln 2}^{-\frac{\ln 2}{2}} f(t)dt$ يمكن وضع $e^t = \sin x$.	$0,5$
ب) استنتج مساحة الحيز Δ.	$0,25$
الجزء 3 (2ن)	
لتكن G الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $\begin{cases} G(x) = \int_x^{2x} f(t)dt & si\ x > 0 \\ G(0) = 0 \end{cases}$	
❶ تحقق أن الدالة G معرفة لكل x من $\mathbb{R}^+$.	$0,25$
❷ أثبت أن $x \ln\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right) \leq G(x) \leq x \ln\left(\frac{x}{e^x-1}\right)$.	$0,25$
❸ استنتج أن G متصلة و قابلة للاشتقاق على يمين 0.	$0,25$
❹ احسب : $\lim_{x\to+\infty} G(x)$.	$0,25$
❺ أثبت أن G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$، و أثبت أن $(\forall x > 0)\ \left(G'(x) = \ln\left(\frac{4x}{(e^x+1)^2(e^x-1)}\right)\right)$.	$0,5$
❻ نقبل أن $(\forall x > 0)\ ((e^x+1)^2(e^x-1) > 4x)$. اعط جدول تغيرات الدالة G.	$0,5$
تمرين 2	$5,5pnt$
الجزء 1 (1ن)	
ليكن $m \in \mathbb{C}$ نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E_m)\ :\ z^2 - (1+2m+im)z + 2m(1+im) = 0$	
❶ تحقق من أن مميز المعادلة هو : $\Delta = (1-2m+im)^2$.	$0,5$
❷ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m).	$0,5$
الجزء 2 (4,5ن)	
المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب الى م.م.م $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $-i$ و $b = \frac{2m}{1+im}$ و m مع $m \neq i$.	
❶ أ) بين أن : $b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \|m\|^2 = Im(m)$.	$0,5$
ب) استنتج مجموعة النقط $M(m)$ بحيث $b \in \mathbb{R}$.	$0,5$

❷أ) بين أن النقط A و M و O مستقيمية اذا و فقط اذا كان $m \in i\mathbb{R}$.	$0,5$
ب) أثبت أنه اذا كان $m \neq 0$ فإن $\frac{m+i}{2m} = \frac{b+i}{b}$.	$0,5$
ج) استنتج أنه اذا كان $m \notin i\mathbb{R}$ فإن النقط A و B و O و M متداورة.	$0,5$
❸ نعتبر f التطبيق المعرف من $(\mathcal{P}) - \{O\}$ نحو $(\mathcal{P})$ و الذي يحول $M'(z')$ إلى $M''(z'')$ بحيث $z'' = (1+im)z'$.	
أ) حدد مجموعة النقط $M(m)$ بحيث يكون التطبيق f دورانا.	$0,5$
ب) علما أن f دوران بين أنه اذا كان $z' \neq 0$ فإن $z'' \neq z'$.	$0,5$
ج) علما ان $(M'M'') \perp (OM')$. بين أن $m \in \mathbb{R}$ و أن $1 + im = \sqrt{1+m^2}e^{i\arctan(m)}$.	1
تمرين 3	$3pnt$
نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية $2z^2(1-\cos(2\theta)) - 2z\sin(2\theta) + 1 = 0 \quad : \quad (E)$ حيث $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.	
❶ حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E).	1
❷ اكتب على الشكل المثلثي العددين z_1 و z_2 (ناقش حسب قيم θ).	1
❸ نعتبر النقط $I(\frac{1}{2\sin\theta})$ و $A(\frac{e^{-i\theta}}{2\sin\theta})$ و $B(\frac{e^{i\theta}}{2\sin\theta})$.	
أ) حدد المجموعة (Γ) للأعداد الحقيقية θ من $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ بحيث يكون المثلث OAB متساوي الساقين و قائم الزاوية في O.	$0,5$
ب) اعط الكتابة العقدي للدوران الذي مركزه I و يحول A الى B.	$0,5$

Scanner le code QR pour avoir la solution après 12 :30.

بالتوفيق