ثانوية بنسودة التأهيلية **المديرية الإقليمية - فاس -**	# امتحان تجريبي رقم 2 د 2 مدة الانجاز $4h$	**الثانية باك علوم رياضية** $2021-2022$

تمرين 1

$11pnt$

ليكن n عدد صحيح طبيعي. نعتبر الدالة f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f_n(x)=x(1-\ln x)^n & x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$$

ليكن $(\mathcal{C}_n)$ منحنى الدالة f_n في معلم متعامد ممنظم.

الجزء 1 (4ن)

❶ أ) بين أن الدالة f_n متصلة على يمين 0 (يمكنك وضع $x=t^n$). — $0,5$

ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين 0. — $0,5$

ج) احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x), \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_1(x)}{x}, \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_2(x)}{x}$ — 1

❷ أ) ادرس تغيرات الدالة f_1. — $0,5$

ب) ادرس تغيرات الدالة f_2. — $0,5$

❸ أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$. — $0,5$

ب) انشئ المنحيين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$ (نقبل أن النقطة $A(1,1)$ نقطة انعطاف للدالة $(\mathcal{C}_2)$) (نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$). — $0,5$

الجزء 2 (2,25ن)

نعتبر الدالة العددية للمتغير x المعرفة على المجال $]-\infty,0]$ بما يلي : $F(x)=\displaystyle\int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

❶ أ) أثبت أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0]$ و أن :

$$(\forall x\in]-\infty,0])F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$ — $0,5$

ب) استنتج تغيرات الدالة F على المجال $]-\infty,0]$. — $0,5$

❷ أ) بين أن لكل $x\in]-\infty,0]$ لدينا

$$\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1}f_1(t)\mathrm{d}t\le F(x)\le\frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1}f_1(t)\mathrm{d}t$$ — $0,5$

ب) تحقق من أن الدالة $x\mapsto x^2\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{\ln x}{2}\right)$ دالة أصلية ل f_1 على المجال $]0,+\infty[$ — $0,25$

ج) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\displaystyle\int_{e^x}^{1}f_1(t)=\frac{3}{4}$ — $0,25$

❸ نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية l عندما يؤول x الى $-\infty$. بين أن : $\dfrac{3}{8}\le l\le\dfrac{3}{4}$ — $0,25$

الجزء 3 (4,75ن)

لكل عدد صحيح طبيعي n غير منعدم ، نضع $u_n=\displaystyle\int_1^e f_n(x)\mathrm{d}x$

❶ أ) بين أن : $(\forall n\ge1)u_n\ge0$ — $0,5$

ب) حدد اشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على المجال $[1,e]$. — $0,5$

ج) بين أن $(\forall n\ge1)$: $u_{n+1}\le u_n$ — $0,25$

د) استنتج ان المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة. — $0,25$

❷ أ) بين أن $(\forall n \geq 1)$: $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{(n+1)}{2}u_n$	$0,5$
ب) استنتج مساحة الحيز المحصور بين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ و المستقيمين $x = 1$ و $x = e$	$0,5$
❸ أ) بين أن $(\forall n \geq 2)$: $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$ (يمكنك استعمال الاسئلة 1)أ) و 1) ج) و 2)أ))	$0,75$
ب) حدد نهاية المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(nu_n)_{n\geq1}$	$0,5$
❹ ليكن a عدد حقيقي مخالف ل u_1. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي $v_1 = a$ و لكل $(n \geq 1)$ $v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}v_n$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n، نضع $d_n = \lvert v_n - u_n \rvert$	
أ) بين أن : $(\forall n \geq 1)\ d_n = \frac{n!}{2^{n-1}}d_1$	$0,25$
ب) بين أن : $(\forall n \geq 2)\ \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$	$0,25$
ج) بين أن $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = +\infty$	$0,25$
د) استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متباعدة.	$0,25$
تمرين 2	$5pnt$
ليكن m عدد عقديا يخالف 1.	
الجزء 1 (2,5ن)	
نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(\mathrm{E_m})$ ذات المجهول z : $(\mathrm{E_m}): \quad \mathrm{z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0}$	$0,5$
❶ أ) تحقق من أن $\Delta = [(1+i)(m-1)]^2$ هو مميز المعادلة (E_m)	
ب) حل المعادلة $(\mathrm{E_m})$ في $\mathbb{C}$	$0,5$
ج) حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة $(\mathrm{E_m})$ يساوي 1.	$0,5$
❷ نضع $\mathrm{z_1 = 1 - im}$ و $\mathrm{z_2 = m - i}$.	
في حالة $\mathrm{m = e^{i\theta}}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$، أكتب $\mathrm{z_1}$ و $\mathrm{z_2}$ على الشكل المثلثي.	1
الجزء 2 (2ن)	
المستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{v}})$	
نعتبر النقط $\mathrm{M, M_1}$ و $\mathrm{M_2}$ التي ألحاقها على التوالي $\mathrm{m, z_1 = 1 - im}$ و $\mathrm{z_2 = m - i}$.	
❶ حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط $\mathrm{M, M_1}$ و $\mathrm{M_2}$ مستقيمية.	$0,5$
❷ أ) بين أن التحويل R الذي يربط النقطة $\mathrm{M(z)}$ بالنقطة $\mathrm{M'(z')}$ بحيث $\mathrm{z' = 1 - iz}$: هو دوران ينبغي تحديد مركزه Ω و زاويته.	$0,5$
ب) أثبت أن العدد العقدي $\frac{\mathrm{z_2 - z_1}}{\mathrm{z_2 - m}}$ تخيلي صرف اذا و فقط اذا كان $\mathrm{Re(m) + Im(m) = 1}$.	$0,5$
ج) استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و $\mathrm{M_1}$ و $\mathrm{M_2}$ متداورة.	$0,5$
الجزء 3 (0,5ن)	
حدد طبيعة التحويل f و كذا عناصره الأساسية بحيث $f(z) = (1+i)z + 1 + i$ لكل z من $\mathbb{C}$.	$0,5$

تمرين 3	$4pnt$
الجزء 1 (1,5ن)	
نعتبر في (E) المعادلة التالية : $(E) : 113x - 68y = 22$	
❶ بين أن المعادلة (E) تقبل مالانهاية من الحلول.	$0,5$
❶ اوجد حلا خاصا (x_0, y_0) لـ (E) مبزا كيف حصلت عليه.	$0,5$
❶ أوجد جميع حلول المعادلة (E) موضحا جميع المراحل.	$0,5$
الجزء 2 (4,25ن)	
لكل n من $\mathbb{N}$ نضع $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.	
❶ أ) تحقق من أن a_n عدد زوجي لكل n من $\mathbb{N}$.	$0,5$
ب) حدد قيم n التي يكون من أجلها $a_n \equiv 0[3]$	$0,5$
❷ ليكن p عددا اوليا بحيث $p > 3$.	
أ) بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$ و $6^{p-1} \equiv 1[p]$	$0,5$
ب) بين أن p يقسم a_{p-2}.	$0,5$
ج) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q، يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث $a_n \wedge q = q$.	$0,5$

Scanner le code QR pour avoir la solution après 18 :30.