ثانوية بنسودة التأهيلية	امتحان تجريبي رقم 3 د 2	الثانية باك علوم رياضية
المديرية الإقليمية - فاس -	مدة الانجاز $4h$	$2021-2022$

$3,5pnt$	**تمرين 1**
	نعتبر $*$ قانون التركيب الداخلي المعرف على المجموعة $\mathbb{C}$ بما يلي : $\forall (a,b)\in\mathbb{C}^2 \ : \ a*b=i(a+1)(b+1)-1$
$0,25$	❶ أ) بين أن $*$ قانون تبادلي في $\mathbb{C}$.
$0,25$	ب) بين أن $*$ قانون تجميعي في $\mathbb{C}$.
$0,25$	ج) اوجد في $(\mathbb{C},*)$ العنصر المحايد.
$0,25$	د) حدد العناصر القابلة للمماثلة في $(\mathbb{C},*)$.
	❷ نعتبر المجموعة $\mathbb{S}=\{z\in\mathbb{C}/\lvert z+1\rvert=1\}$
$0,5$	أ) بين أن $(\mathbb{S},*)$ جزء مستقر من $(\mathbb{C},*)$.
$0,5$	ب) بين أن $(\mathbb{S},*)$ زمرة تبادلية.
$0,5$	❸ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z*z=1+(i*z)$.
$0,5$	❹ حدد و أنشئ في المستوى العقدي المجموعة التالية : $E=\{M(z)/z*z\in i\mathbb{R}\}$.
	❺ ليكن $\theta\in]0,\pi[$ نضع $z=-1+e^{i\theta}$.
$0,25$	أ) حدد معيار و عمدة العدد العقدي z.
$0,25$	ب) حدد عمدة و معيار العدد العقدي $z*z$. (ناقش حسب قيم θ)
$3pnt$	**تمرين 2**
	في المستوى العقدي $\mathcal{P}$ المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي : $a=3+5i$ و $b=-4+2i$ و $c=1+4i$. ليكن f التحويل في المستوى $\mathcal{P}$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من المستوى $\mathcal{P}$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=(2-2i)z+1$
$0,25$	❶ حدد طبيعة التحويل f و عناصره المميزة.
$0,25$	❷ أ) حدد لحق النقطة B' صورة B بالتطبيق f.
$0,5$	ب) بين أن المستقيمين (CB') و (CA) متعامدان.
	❸ لتكن M نقطة ذات لحق $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$، و لتكن M' صورة M بالتحويل f
$0,5$	بين أن المتجهتين $\overrightarrow{CM'}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدتان اذا و فقط اذا كان $x+3y=2$.
	❹ نعتبر المعادلة $(E)\ : \ x+3y=2$ حيث $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$.
$0,25$	أ) تحقق من أن الزوج $(-4,2)$ يحقق المعادلة (E).
$0,5$	ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).
$0,75$	ج) حدد مجموعة النقط M من المستوى العقدي $\mathcal{P}$ التي من أجلها يكون زوج احداثيتيها مكون من أعداد نسبية من المجال $[-5,5]$ حيث تكون المتجهتان $\overrightarrow{CM'}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدتان. أنشئ شكلا اجماليا.

تمرين 3

$3,5pnt$

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث 2027 يقسم a^3+b^3.

الجزء 1

$0,5$ ❶ أثبت أن 2027 عدد أولي.

$0,5$ ❷ بين أن $a^{2025} = -b^{2025}[2027]$.

$0,5$ ❸ بين أن : 2027 يقسم a اذا و فقط اذا كان 2027 يقسم b.

$0,5$ ❹ نفترض أن 2027 يقسم a. بين أن 2027 يقسم $(a+b)$.

❺ عكسيا نفترض أن 2027 لا يقسم a.

$0,5$ أ) بين أن $a^{2026} = b^{2026}[2027]$.

$0,5$ ب) بين أن $a^{2025}(a+b) = 0[2027]$.

$0,5$ ج) استنتج أن 2027 يقسم $(a+b)$.

الجزء 2

$Bonus$

نعتبر في $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ المعادلة $(E) : x^3+y^3 = 2027(1+xy)$.

$0,5$ ❶ بين أنه اذا كان (x_0, y_0) حل للمعادلة (E) فإنه يوجد $k \in \mathbb{N}$، بحيث $(x_0+y_0) = 2027k$.

$0,5$ ❷ تحقق من أن : $k(x_0-y_0)^2 + (k-1)x_0y_0 = 1$.

$0,5$ ❸ بين أن $k=1$، ثم أوجد حلول المعادلة (E).

تمرين 4

$10pnt$

الجزء 1

ليكن n عدد من $\mathbb{N}^* - \{1\}$. نعتبر الدالة f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي:

$$f_n(x) = n(x-1) - x\ln x$$

$0,5$ ❶ بين أن f_n قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ محددا مشتقتها.

$0,75$ ❷ ادرس تغيرات f_n و اعط جدول تغيراتها.

$0,75$ ❸ اثبت أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $]1,+\infty[$ و قارن بين α_n و e^{n-1}.

$0,75$ ❹ أ) قارن بين $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ لكل $x > 0$.

$0,5$ ب) ادرس رتابة (α_n).

$0,5$ ج) استنتج أن (α_n) غير مكبورة.

$0,5$ د) تحقق من أن $e^{\frac{\alpha_n-1}{\alpha_n}} = \sqrt[n]{\alpha_n}$.

الجزء 2

ليكن n عدد من $\mathbb{N}^* - \{1\}$. نعتبر الدالة g_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} g_n(x) = \dfrac{(\ln x)^n}{x-1} & x \neq 1,\ x > 0 \\ g_n(1) = 0 \end{cases}$$

$0,5$ ❶ بين أن g_n قابلة للاشتقاق في 1 و حدد $g'_n(1)$ حسب قيم n.

$0,75$ ❷ بين أن g_n قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ محددا $g'_n(x)$ لكل x من $]0,+\infty[-\{1\}$.

	❸ اعط جدول تغيرات الدالة g_n في الحالتين :
0,5	أ) حالة $n = 2$
0,5	ب) حالة n فردي أكبر من أو يساوي 3.
0,5	❹ انشئ (C_2) منحنى g_2 في م.م.م $\|\|\overrightarrow{i}\|\| = 2cm$ (نأخذ : $\alpha_2 \backsimeq 5$ و $g_2(\alpha_2) \backsimeq 0,65$).

الجزء 3

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{3} dx$.

0,75	❶ اثبت أن $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة .
0,75	❷ باسنعمال مكاملة بالأجزاء برهن أن $I_{n+1} = \frac{e}{3} - (n+1)I_n$
0,75	❸ احسب I_1 و I_2.
0,75	❹ اسنتج قيمة $J = \int_0^{\frac{1}{3}} e^{3\sqrt{3x}} dx$.

Scanner le code QR pour avoir la solution.