امتحان تجريبي 5 د 2

مدة الانجاز $4h$

تمرين 1

$9pnt$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ مع $\|\vec{i}\| = 1$.

الجزء 1

$0,5$ ❶ أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$0,5$ ب) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

$0,5$ ❷ ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

$0,5$ ❸ أ) ادرس تقعر المنحنى (C_f) .

$0,5$ ب) انشئ المنحنى (C_f).

$0,5$ ❹ أ) بين أن f حل للمعادلة التفاضلية $(E)\ :\ y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$

$0,5$ ب) حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية (E).

الجزء 2

$0,5$ ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و لتكن A_n مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و محمور الأراتيب و المستقيم ذو المعادلة $x = n$.

$0,5$ ❶ احسب A_n بدلالة n.

$0,5$ ❷ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

الجزء 3

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = n\displaystyle\int_0^1 (f(x))^n dx$.

$0,5$ ❶ بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dt$.

$0,5$ ❷ أ) بين أن $(\forall u \in [1,2])\ 2 - u \leq \dfrac{1}{u} \leq 1$

$0,5$ ب) استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall x \in [0,n])\ x - \dfrac{x^2}{2n} \leq n\ln(1+\dfrac{x}{n}) \leq x$

$0,5$ ❸ أ) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n \leq \displaystyle\int_0^n e^{-x} dx$

$0,5$ ب) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}} \displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x} dx \leq u_n$

$0,5$ ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها.

❹ ليكن a من المجال $]0,1[$.

$0,5$ أ) بين أن : $\displaystyle\int_a^1 n(f(x))^n dx \leq n(1-a)(f(a))^n$.

$0,5$ ب) استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^1 n(f(x))^n dx = 0$.

$0,5$ ج) احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^a n(f(x))^n dx$.

تمرين 2

3pnt

0,25 نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E)\ :\ z^3-\frac{3}{2}(\sqrt{3}+i)z-(1+i)=0$$

و نعتبر العدد العقدي $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

0,25 ❶ تحقق من أن الجذور المكعبة للعدد 1 هي 1 و j و $\bar{j}$.

❷ حدد عددين عقديين x و y يحققان النظمة : $(S)\begin{cases} x+y=1+i \\ xy=i \end{cases}$

❸ ليكن α و β عددين عقديين بحيث $\alpha+\beta$ حل للمعادلة (E) و $\alpha\beta=-ij$.

0,5 أ) بين أن α^3 و β^3 يحققان النظمة (S).

0,75 ب) استنتج أن حلول المعادلة (E) تكتب على الشكل $1-ij$ و $j(1-i\bar{j})$ و $\bar{j}(1-i)$.

0,5 ❹ أ) ليكن θ عنصرا من المجال $]0,2\pi[$.

حدد بدلالة θ معيار و عمدة العدد العقدي $1-(\cos\theta+i\sin\theta)$.

0,75 ب) حدد معيار و عمدة كل حل من حلول المعادلة (E).

تمرين 3

3pnt

المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E_\theta)\ :\ z^2-2z+\frac{1}{\cos^2(\theta)}=0$$

حيث θ بارمتري حقيقي ينتمي الى المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

0,75 ❶ أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_θ).

0,75 ب) ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_θ) حيث $Im(z_1)=\tan\theta$.

اكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

0,75 ❷ لتكن M_1 و M_2 على التوالي صورتي z_1 و z_2 في المستوى العقدي. بين أن المثلث OM_1M_2 متساوي الساقين في O.

0,75 ❸ ليكن n من $\mathbb{N}$. نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E)\ :\ z^{2n}-2z^n+\frac{1}{\cos^2(\theta)}=0$$

حدد حلول المعادلة (E) على الشكل المثلثي.

تمرين 4	$2pnt$
نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ النظمة $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ (S) حيث a و b و p و q أعداد صحيحة و $pgcd(p,q)=1$.	
❶ أ) بين أنه يوجد زوج (u_0,v_0) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث $pu_0+qv_0=1$.	$0,25$
ب) بين أن $x_0=bpu_0+aqv_0$ حل للنظمة (S).	$0,5$
❷ ليكن x حل للنظمة (S) بين أن pq يقسم العدد $x-x_0$.	$0,25$
❸ ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث pq يقسم العدد $x-x_0$. بين أن x حل للنظمة (S).	$0,5$
❹ استنتج مجموعة حلول النظمة (S).	$0,25$
❺ استنتج في $\mathbb{Z}$ حلول النظمة التالية : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$ (S')	$0,25$

تمرين 5 (3pnt)

Partie 1

❶ a) Prouver que 29 est un nombre premier.**(0,25p)**

b) Soit $x \in \mathbb{N}$ et n un entier naturel tel que $n \equiv 1[28]$.Prouver que $x^n \equiv x[29]$.**(0,25p)**

❷ On considère l'équation (E) : $17x - 28y = 1$ où $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver un tel couple solution.**(0,5p)**

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).**(0,5p)**

Partie 2

Soit $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{N}, x < 29\}$ Pour $x \in \mathbf{A}$, on note $f(x)$ le reste de la division euclidienne de x^{17} par 29 et $g(x)$ le reste de la division euclidienne de x^5 par 29.

❸ a) Prouver que $f(x) \in \mathbf{A}$ et $x^{17} \equiv f(x)[29]$, puis Prouver que $g(x) \in \mathbf{A}$ et $x^5 \equiv g(x)[29]$.**(0,25p)**

b) Pour $x \in \mathbf{A}$, prouver que $g(f(x)) = x$. **(0,25p)**

❹ Applications :

On attribue à chaque lettre de l'alphabet et "α" et "β", l'entier donné par le tableau ci-dessous :

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
O	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**	α	β
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

a) Bob code le mot "BENSOUDA" à l'aide de la fonction f et envoie le message codé à Alice. Voici le codage des cinq premières lettres **"B"**, **"E"**, **"N"**, **"S"** et **"O"** :

Message initial	**B**	**E**	**N**	**S**	**O**
Entier associé	2	5	14	19	15
Utilisation de f	$2^{17} \equiv 21[29]$	$5^{17} \equiv 9[29]$	$14^{17} \equiv 11[29]$	$19^{17} \equiv 14[29]$	$15^{17} \equiv 18[29]$
Entier associé	21	9	11	14	18
Message codé	**U**	**I**	**K**	**N**	**R**

Compléter son message.**(0,5p)**

b) Alice reçoit le message suivant, codé par Bob, à l'aide de la fonction $\boldsymbol{f}$:

B	**J**	**A**	**C**	**I**	**Z**

Décrypter ce message à la place d'Alice. **(0,5p)**

Scanner le cod QR pour avoir la correction