

التمرين الأول

3 ن

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx \quad \text{لكل } n \in \mathbb{N} \text{ نضع}$$

$$(1) \text{ أحسب } I_0$$

$$(2) \text{ (a) بين أن } I_n \geq 0 \text{ (} \forall n \in \mathbb{N} \text{)}$$

$$(b) \text{ بين أن المتتالية } (I_n) \text{ تناقصية واستنتج أنها متقاربة .}$$

$$(3) \text{ (a) بين أن } I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1} \text{ (} \forall n \in \mathbb{N} \text{)}$$

$$(b) \text{ استنتج } \lim I_n$$

$$(4) \text{ (a) بين باستعمال مكاملة بالأجزاء أن } I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$(b) \text{ بين أن } 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2} \text{ (} \forall n \in \mathbb{N} \text{)}$$

$$(c) \text{ استنتج } \lim n I_n$$

التمرين الثاني

9 ن

لكل دالة متصلة على $]-1, +\infty[$ نعتبر الدالة $T(f)$ المعرفة على $]-1, +\infty[$ بما يلي

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t} dt$$

الجزء الأول

$$(1) \text{ حدد الدالة } T(f) \text{ إذا كانت } f \text{ ثابتة يعني } f(t) = a \text{ (} \forall t \in]-1, +\infty[\text{)}$$

$$(2) \text{ حدد الدالة } T(f) \text{ إذا كانت } f \text{ معرفة بـ } f(t) = \frac{t(t+1)}{(t+2)^2} \text{ (} \forall t \in]-1, +\infty[\text{)}$$

الجزء الثاني

نفترض في هذا الجزء أن الدالة f معرفة بما يلي: $f(t) = e^{-t}$ ($\forall t \in]-1, +\infty[$)

$$(1) \text{ (a) بين أن الدالة } T(f) \text{ قابلة للاشتقاق على }]-1, +\infty[\text{ واحسب } (T(f))'(x)$$

(b) ضع جدول تغيرات الدالة $T(f)$ على $]-1, +\infty[$.

(2) (a) بين أن $(\forall x \geq 0) : T(f)(x) \leq 1 - e^{-x}$

(b) استنتج أن الدالة $T(f)$ تقبل نهاية منتهية l في $+\infty$ وأن $l \leq 1$.

(3) (a) بين أن $(\forall -1 < x < 0) : T(f)(x) \leq \ln(1+x)$

(b) استنتج $\lim_{x \rightarrow -1^+} T(f)(x)$ وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها ..

(4) أنشئ المنحنى $(C_{T(f)})$.

(5) (a) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = 1$ وأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\ln(x))}{\ln(x)} = 0$

(b) بين أن $(\forall x \geq 1) : 0 \leq T(f)(x) \leq \int_0^{\ln(x)} \frac{1}{1+t} dt + \frac{1}{x} \int_{\ln(x)}^x \frac{1}{1+t} dt$

(c) استنتج أن

$(\forall x \geq 1) : 0 \leq T(f)(x) \leq \ln(1 + \ln(x)) + \frac{1}{x} [\ln(1+x) - \ln(1 + \ln(x))]$

(d) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{T(f)(x)}{\ln(x)}$

الجزء الثالث

نعتبر في هذا الجزء الدالة f_n المعرفة بما يلي : $(\forall t \in]-1, +\infty[) : f_n(t) = t^n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$

(1) ليكن $x > -1$.

(a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : T(f_n)(x) + T(f_{n+1})(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(b) أحسب $T(f_1)(x)$.

(c) استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : T(f_n)(x) = (-1)^n \left[\ln(1+x) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^k}{k} \right]$

(2) ليكن $x \in]-1, 1[$.

(a) بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} T(f_n)(x) = 0$

(b) استنتج أن $\ln(1+x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

التمرين

5

المستوى φ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O; \vec{I}; \vec{J})$. A هي النقطة ذات اللق 2. ليكن التطبيق φ من \mathcal{P} نحو \mathcal{P} الذي

يربط كل نقطة M ذات اللق z بالنقطة M' ذات اللق z' بحيث: $z' = \frac{3+\sqrt{3}i}{4}z + \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

- 1- بين أن A هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتطبيق φ .
- 2- لتكن M نقطة من \mathcal{P} . تخالف A و M' صورتها بالتطبيق φ .

(أ) بين أن $z'-2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) (z-2)$

- (ب) استنتج AM' بدلالة AM وحدد قياسا للزاوية $(\widehat{AM}; \widehat{AM'})$.
- (ج) بين أن المثلث AMM' قائم الزاوية في M' .
- (د) أنشئ M' في حالة $z = 4+i$

3- (أ) بين أن $\varphi = \text{hor } r$ حيث r هو الدوران ذو المركز A والزاوية $\frac{\pi}{6}$ و h هو التحاكي ذو المركز A والنسبة $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- (ب) حدد صورة الدائرة (C) ذات المركز O والشعاع 1 بالتطبيق φ .
- 4- ليكن n عدداً من \mathbb{N}^* ونعتبر التطبيقات φ_n من \mathcal{P} نحو \mathcal{P} المعرفة بما يلي: $\varphi_1 = \varphi$ و $\varphi_{n+1} = \varphi \circ \varphi_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)
نضع $M_n(O) = \varphi_n(O)$ وليكن z_n لق النقطة M_n .

(ب) تحقق أن $M_{n+1} = \varphi(M_n)$ واستنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) z_{n+1} - 2 = \frac{3+\sqrt{3}i}{4} (z_n - 2)$

(ج) نضع $t_n = z_n - 2$. بين بالترجع أن: $t_n = -2 \left(\frac{3+\sqrt{3}i}{4} \right)^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) ثم حدد z_n بدلالة n .

(د) اكتب العدد $\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{4} \right)^n$ على شكله الجبري ثم حدد قيم n التي من أجلها النقطة M_n تنتمي إلى المحور $(O; \vec{I})$.

التمرين

3

a و b عدنان صحيحان طبيعيين بحيث $a > b$. نعتبر العدد $N = ab(a^{30} - b^{30})$.

- 1- ليكن p عدداً أولياً موجباً بحيث $p-1$ يقسم العدد 30.
(أ) بين أن العدد N يقسم p (يمكنك استعمال مبرهنة فيرما)
- (ب) حدد قيم p واستنتج أن N يقبل القسمة على 14 322.

2- نفترض أن: $\begin{cases} a^2 + b^9 = 1953637 \\ a^{13} - b^{13} = 1220694933 \end{cases}$

- (أ) تحقق أن $b < a < 10$
- (ب) بين أن: $x^9 \equiv x[5]$ و $x^{13} \equiv x[5]$ ($\forall x \in \mathbb{N}$) و $x^9 \equiv x[5]$ و $x^{13} \equiv x[5]$
- (ج) استنتج أن $\begin{cases} a+b \equiv 2[5] \\ a-b \equiv 3[5] \end{cases}$ وحدد قيمة كل من a و b ثم بين أن N يقبل القسمة على 71 610.