

الامتحان التجريبي 2	نهاية عينة السج
المدة: 4 ساعات	مادة: الرياضيات
الصفحة: 1/3	السنة الدراسية 2010/2011

التعريف 1

الجزء الأول

(1) بين أن $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*) : \ln(t) \leq t - 1$.

(2) نعتبر الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x - \ln(x)} & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(a) بين أن f متصلة في 0 على اليمين.

(b) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على \mathbb{R}^+ ثم أعط تاويلاً هندسياً للنتيجة المحصل عليها.

c احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(3) ادرس تغيرات الدالة f .

(4) ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

(a) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفضول 1.

(b) ارسم في نفس المعلم (T) و (C_f) .

(5) ليكن x عدداً حقيقياً بحيث $x \geq 1$ ، نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي

$$v_n = 1 + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln^2(x)}{x^2} + \dots + \frac{\ln^n(x)}{x^n} :$$

بين أن $(v_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها.

الجزء الثاني

لتكن F الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}_+^* بما يلي $F(x) = \int_1^x \frac{t}{t - \ln(t)} dt$

(1) ادرس منحنى تغيرات F

(2) حدد إشارة $F(x)$ تبعاً لقيم x .

(3) (a) بين أن $\forall x \in]0, 1[: 0 \leq \frac{x}{x - \ln(x)} \leq x$

(b) استنتج أن $-\frac{1}{2} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \leq 0$: ثم استنتج أن $(\forall x \in]0, 1[) : \frac{x^2 - 1}{2} \leq F(x) \leq 0$

(4) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ ثم استنتج أن $(\forall x \in [1, +\infty[) : f(x) \geq 1$

(5) (a) ليكن $x \in \mathbb{R}_+^*$ ، احسب التكاملين $\int_1^x (1 + \frac{\ln(t)}{t}) dt$ و $\int_1^x (1 + \ln(t)) dt$

(b) بين أن $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*) : t \geq 1 \Rightarrow \frac{t}{t - \ln(t)} \leq 1 + \ln(t)$

(c) استنتج أن $(\forall x \in [1, +\infty[) : F(x) \leq x \ln(x)$

(d) اثبت أن $(\forall x \in [1, +\infty[) : x + \frac{\ln^2(x)}{2} - 1 \leq F(x)$

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد منظم و مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) لكل z من $\mathbb{C} - \{-i\}$ نضع $\varphi(z) = i \left(\frac{z-2i}{z-i} \right)$ و نعتبر النقطتين A و B التي لحيتهما $z_A = 2i$ و $z_B = i$ و نتكن النقطة M ذات اللحق z .

$$(1) \text{ I بين أن } : |\varphi(z)| = \frac{AM}{BM} \quad (\forall z \in \mathbb{C} - \{i\})$$

$$\text{و أن } : \arg(\varphi(z)) \equiv \overline{(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})} + \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad (\forall z \in \mathbb{C} - \{i, 2i\})$$

(2) حديد طبيعة كل من المجموعتين $E = \{M(z) / |\varphi(z)| = 1\}$ و $F = \{M(z) / \varphi(z) \in i\mathbb{R}\}$ ،

II (1) بين أن :

$$(\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}) : |\varphi(z) - i| = \frac{1}{|z-i|} \quad ; \quad (\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}) : \arg(\varphi(z) - i) = -\arg(z - i) \quad [2\pi]$$

(2) بين أنه إذا كانت النقطة $M(z)$ تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B و شعاعها $\frac{1}{2}$ فإن النقطة $M'(\varphi(z))$ تنتمي إلى دائرة يتم تحديدها .

(3) أنشئ النقطة M' انطلاقاً من النقطة M

III (1) حل في \mathbb{C} المعادلة $\varphi(z) = z$ نرمز ب u و v حلي هذه المعادلة بحيث $\operatorname{Re}(u) = 1$.

(2) ليكن : $z \in \mathbb{C} - \{i, u, v\}$ و $M(z)$ و $M'(\varphi(z))$ و $C(u)$ و $D(v)$.

$$(a) \text{ بين أن } : \frac{\varphi(z)-u}{\varphi(z)-v} = -\frac{z-u}{z-v}$$

$$(b) \text{ استنتج أن } : \overline{(\overrightarrow{M'D}, \overrightarrow{M'C})} \equiv \pi + \overline{(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MC})} \quad [2\pi]$$

(c) بين أنه إذا كانت النقط M و C و D مستقيمة فإن النقط M' و M و C و D مستقيمة و إذا كانت M و C و D غير مستقيمة فإن النقط M' و M و C و D تكون متداورة .

التمرين 3

(أ) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $35x - 192y = 1$

(ب) بين ان المعادلة : $35x = 1$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{Z}/192\mathbb{Z}$ ثم استنتج حلها

(2) بين انه يوجد عددين أوليين مختلفين p و q يحققان :

$$(p-1)(q-1) = 192 \quad \text{و} \quad \operatorname{PGCD}((p-1), (q-1)) = 4$$

(3) ليكن a من \mathbb{N}^*

$$(1) \text{ بين ان } : a^{385} \equiv a \quad [13]$$

$$(ب) \text{ استنتج ان } : a^{385} \equiv a \quad [221]$$

$$(4) (أ) \text{ تحقق من } : 2008 \equiv 19 \quad [221]$$

(ب) استنتج مما سبق باقي القسمة الاقليدية للعدد $2008^{385 \cdot 2009}$ على 221

(5) ليكن b مجموع ارقام العدد $2008^{385 \cdot 2009}$ في نظمة العد العشري

حدد باقي القسمة الاقليدية للعدد b على 9

التعمير:

ليكن α حلاً للمعادلة $Z^2 + Z + 1 = 0$ في \mathbb{C}

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\} \quad \text{نضع}$$

- 1- بين أن $(\mathbb{Z}[\alpha], +)$ زمرة تبادلية. 0,5
- 2- أثبت أن $(\mathbb{Z}[\alpha], +, \times)$ حلقة تبادلية وواحدة 0,5
- 3- هل $(\mathbb{Z}[\alpha], +, \times)$ حلقة كاملة؟ 0,5
- 4- تحقق أن $\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}[\bar{\alpha}]$ 0,5
- 4- تعبر التطبيق f المرف بمايلي:

$$f: \mathbb{Z}[\alpha] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$a + b\alpha \longmapsto a^2 + b^2 - ab$$

- أ- بين أن $\forall x \in \mathbb{Z}[\alpha], f(x) = |x|^2$ 0,5

- ب- بين أن f تشاكل من $(\mathbb{Z}[\alpha], \times)$ نحو (\mathbb{Z}, \times) 0,5

- د- لتكن G المجموعة المكونة من عناصر $\mathbb{Z}[\alpha]$ التي تقبل مقلوباً أي عناصر بالنسبة لـ "x"

$$f(G) = \{1\} \quad \text{بين أن} \quad \text{0,5}$$

$$\text{أثبت أن} \quad G \quad \text{0,5}$$